

Corrigé

Exercice 2



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.** Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 2 (6 points)

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n , $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.
2.
 - a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
 - b) En déduire la valeur exacte de u_1 .
3.
 - a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ... Affecter à u la valeur ... Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

- b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,6931	0,3069	0,1931	0,1402	0,1098	0,0902	0,0475	0,0099	0,0050

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4.
 - a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Démontrer que $\ell = 0$.

EXERCICE 2

[Liban 2015]

1. Calculons U_0 :

$$\text{Ici: } f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ et } U_0 = \int_0^1 f(x) dx.$$

f est continue sur $[0;1]$, elle admet donc des primitives sur $[0;1]$ et par conséquent: U_0 existe.

$$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \Leftrightarrow U_0 = [\ln |1+x|]_0^1$$

$$\Leftrightarrow U_0 = [\ln(1+x)]_0^1$$

$$\Rightarrow U_0 = \ln 2.$$

Au total: $U_0 = \ln 2$.

2. a. Montrons que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$:

Cela revient à calculer:

$$j = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx,$$

$$\Leftrightarrow j = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1} + x^n}{1+x} \right) dx.$$

$$\text{Soit: } h(x) = \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x}.$$

h est continue sur $[0;1]$, elle admet donc des primitives sur $[0;1]$ et par conséquent: j existe.

Dans ces conditions:

$$j = \int_0^1 \left(\frac{x^n (x+1)}{1+x} \right) dx \Rightarrow j = \int_0^1 x^n dx.$$

$$\text{D'où: } j = \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)} \right]_0^1 \Rightarrow j = \frac{1}{n+1}.$$

Au total, nous avons donc bien: $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$, pour tout entier naturel n .

2. b. Déduisons-en la valeur exacte de U_1 :

Nous savons que: $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$, et $U_0 = \ln 2$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } U_1 + U_0 &= \frac{1}{0+1} \Leftrightarrow U_1 + \ln 2 = 1 \\ &\Rightarrow U_1 = 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

Au total: $U_1 = 1 - \ln 2$.

3. a. Recopions et complétons:

Le tableau recopié et complété est le suivant:

\vdots Initialisation: Affecter à u la valeur $\ln(2)$ Traitement: Pour i variant de 1 à n <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; margin-left: 20px;"> Affecter à u la valeur $\frac{1}{i} - u$ </div> \vdots
--

3. b. Quelle conjecture ?

D'après les données du tableau, on pourrait, a priori, penser que la suite: (U_n) est strictement décroissante.

Par ailleurs, (U_n) semble positive et converger vers "0" (minorant).

4. a. Montrons que (U_n) est décroissante:

Il s'agit de déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

Posons: $g(x) = \frac{x^{n+1}}{1+x}$ et $h(x) = \frac{x^n}{1+x}$.

Nous remarquons alors que: $g(x) = x \times h(x)$.

Or: $x \in [0;1]$, d'où nous pouvons affirmer que:

$$g(x) \leq h(x) \iff \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x}.$$

- Notons que:
- les fonctions g et h sont continues sur $[0;1]$;
 - g et h admettent donc des primitives sur $[0;1]$, et par conséquent: $\int_0^1 g(x) dx$ et $\int_0^1 h(x) dx$ existent ;
 - de plus, les fonctions g et h sont positives sur $[0;1]$;
 - enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies:

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x} \iff 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

$$\iff 0 \leq U_{n+1} \leq U_n$$

$$\implies 0 \leq U_{n+1} - U_n \leq 0.$$

Ainsi, nous pouvons affirmer que: la suite (U_n) est décroissante.

4. b. Démontrons que (U_n) est convergente:

Nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

- Or ici:
- (U_n) est minorée par $m = 0$, (car: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$)
 - (U_n) est décroissante, pour tout entier naturel n .

Donc nous pouvons affirmer que: (U_n) est convergente.

5. Soit l la limite de (U_n) , montrons que $l = 0$:

Soit l la limite de (U_n) , quand n tend vers $+\infty$.

Nous avons:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \\ \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = l \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + U_{n+1} = 2l.$$

Or, nous avons vu que: $U_n + U_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + U_{n+1}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons l'égalité:

$$2l = 0 \Rightarrow l = 0.$$

Donc si l est la limite de (U_n) , nous avons bien: $l = 0$.