EXERCICE 2

[Liban 2015]

1. Calculons U_0:

Ici: $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et $U_0 = \int_0^1 f(x)\,dx$.

f est continue sur [0;1], elle admet donc des primitives sur [0;1] et par conséquent: U_0 existe.

$$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \iff U_0 = [\ln|1+x|]_0^1$$

$$\iff U_0 = [\ln(1+x)]_0^1$$

$$\implies U_0 = \ln 2.$$

Au total: $U_0 = \ln 2$.

2. a. Montrons que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$:

Cela revient à calculer:

$$j = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx,$$

$$\iff j = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1} + x^n}{1+x}\right) dx.$$

Soit: $h(x) = \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x}$.

h est continue sur [0;1], elle admet donc des primitives sur [0;1] et par conséquent: j existe.

Dans ces conditions:

$$j = \int_0^1 \left(\frac{x^n (x+1)}{1+x}\right) dx \Rightarrow j = \int_0^1 x^n \, dx.$$

D'où: $j = \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}\right]_0^1 \Rightarrow j = \frac{1}{n+1}$.

Au total, nous avons donc bien: $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$, pour tout entier naturel n.

2. b. Déduisons-en la valeur exacte de U_1:

Nous savons que: $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$, et $U_0 = \ln 2$.

D'où: $U_1 + U_0 = \frac{1}{0+1} \iff U_1 + \ln 2 = 1$

$\Rightarrow U_1 = 1 - \ln 2$.

Au total: $U_1 = 1 - \ln 2$.

3. a. Recopions et complétons:

Le tableau recopié et complété est le suivant:

⋮
Initialisation: Affecter à u la valeur ln (2)
Traitement: Pour i variant de 1 à n
| Affecter à u la valeur $\frac{1}{i} - u$
⋮

3. b. Quelle conjecture ?

D'après les données du tableau, on pourrait, a priori, penser que la suite: (U_n) est strictement décroissante.

Par ailleurs, (U_n) semble positive et converger vers " 0 " (minorant).

4. a. Montrons que (U_n) est décroissante:

Il s'agit de déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

Posons: $g(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1+x}$ et $h(x) = \dfrac{x^n}{1+x}$.

Nous remarquons alors que: $g(x) = x \times h(x)$.

Or: $x \in [0;1]$, d'où nous pouvons affirmer que:

$$g(x) \leqslant h(x) \iff \frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant \frac{x^n}{1+x}.$$

Notons que:
- les fonctions g et h sont continues sur $[0;1]$;
- g et h admettent donc des primitives sur $[0;1]$, et par conséquent: $\int_0^1 g(x)\,dx$ et $\int_0^1 h(x)\,dx$ existent ;
- de plus, les fonctions g et h sont positives sur $[0;1]$;
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies:

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant \frac{x^n}{1+x} \iff 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

$$\iff 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$$

$$\Longrightarrow 0 \leqslant U_{n+1} - U_n \leqslant 0.$$

Ainsi, nous pouvons affirmer que: la suite (U_n) est décroissante.

4. b. Démontrons que (U_n) est convergente:

Nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici: • (U_n) est minorée par $m = 0$, (car: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \geqslant 0$)

• (U_n) est décroissante, pour tout entier naturel n.

Donc nous pouvons affirmer que: (U_n) est convergente.

5. Soit ℓ la limite de (U_n), montrons que $\ell = 0$:

Soit ℓ la limite de (U_n), quand n tend vers $+\infty$.

Nous avons:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell \\ \\ \bullet \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n + U_{n+1} = 2\ell.$$

Or, nous avons vu que: $U_n + U_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

D'où:

$$\lim_{n \to +\infty} (U_n + U_{n+1}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$= 0.$$

Ainsi, nous obtenons l'égalité:

$$2\ell = 0 \Rightarrow \ell = 0.$$

Donc si ℓ est la limite de (U_n), nous avons bien: $\ell = 0$.