

EXERCICE 4

[Liban 2015]

1. Construisons un arbre de probabilités:

D'après l'énoncé, nous avons:

- A = " voter pour le candidat A "
- B = " voter pour le candidat B "
- V = " la personne dit la vérité "
- \bar{V} = " la personne ne dit pas la vérité "

- $P(A) = 47\%$
- $P(B) = 53\%$
($47\% + 53\% = 1$).

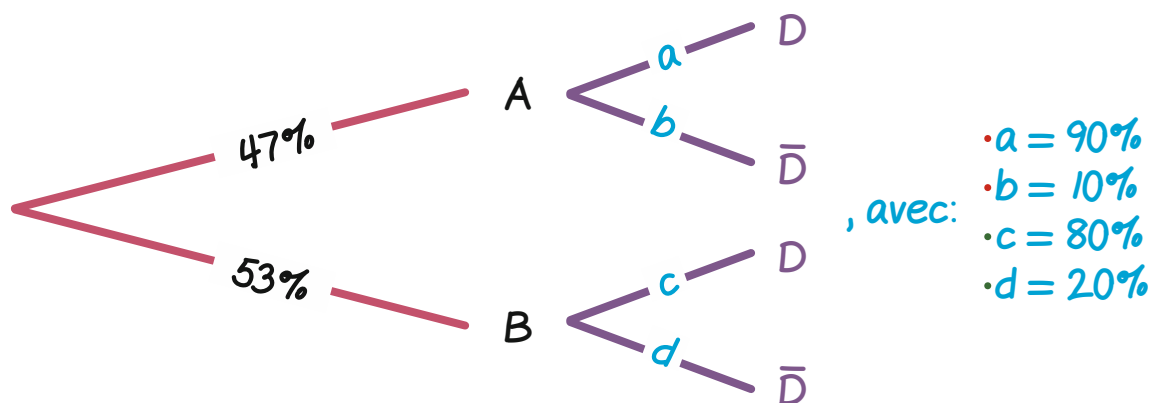
- $P_A(V) = 90\%$
- $P_A(\bar{V}) = 10\%$
($90\% + 10\% = 1$).

- $P_B(V) = 80\%$
- $P_B(\bar{V}) = 20\%$
($80\% + 20\% = 1$).

En prévision de l'élection entre les deux candidats A et B, l'institut de sondage recueille les intentions de vote des futurs électeurs.

Ainsi, l'institut peut représenter un arbre de probabilités.

D'où l'arbre de probabilités suivant:



2. a. Calculons la probabilité que la personne interrogée dise la vérité:

L'événement $V = (V \cap A) \cup (V \cap B)$.

D'où: $P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B)$

$$= P_A(V) \times P(A) + P_B(V) \times P(B).$$

Ainsi: $P(V) = 90\% \times 47\% + 80\% \times 53\%$

$$\Rightarrow P(V) \approx 84.7\%.$$

Au total, 84.7% des personnes interrogées disent la vérité.

2. b. Calculons $P_V(A)$:

$$P_V(A) = \frac{P(V \cap A)}{P(V)} \Leftrightarrow P_V(A) = \frac{P_A(V) \times P(A)}{P(V)}.$$

$$\text{Ainsi: } P_V(A) = \frac{90\% \times 47\%}{84.7\%} \Rightarrow P_V(A) \approx 49.9\%.$$

Au total, la probabilité demandée est de: 49.9%.

3. Démontrons que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0.529:

Soit " P " cette probabilité.

La personne choisie vote effectivement pour A dans 2 cas :

$$P = (V \cap A) \text{ et } P = (\bar{V} \cap B).$$

$$\text{D'où: } P = P(V \cap A) + P(\bar{V} \cap B)$$

$$= P_A(V) \times P(A) + P_B(\bar{V}) \times P(B).$$

$$\text{Ainsi: } P = 90\% \times 0.47 + 20\% \times 0.53$$

$$\Rightarrow P \approx 0.529\%.$$

4. Au seuil de 95%, le candidat A peut-il croire en sa victoire ?

Ici, nous avons: • $n = 1200$

$$\bullet f = 0.529.$$

Dans ces conditions:

$$n = 1200 \geq 30, n \cdot f = 634.8 \geq 5 \text{ et } n \cdot (1 - f) = 565.2 \geq 5.$$

Les conditions étant réunies, un intervalle de confiance à 95% s'écrit:

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right], \text{ cad: } I = \left[0.529 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0.529 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [0.5001 ; 0.5579]$.

Comme $0.5 < 0.5001$, le candidat A peut croire en sa victoire.

5. Déterminons le temps moyen exprimé en heures:

150 h = temps moyen pour atteindre l'objectif.