EXERCICE 4

[Liban 2015]

1. Construisons un arbre de probabilités:

D'après l'énoncé, nous avons:

- •A = " voter pour le candidat A ".
- •B = " voter pour le candidat B ".
- •V = " la personne dit la vérité ".
- •$\overline{V}$ = " la personne ne dit pas la vérité ".

•$P(A) = 47\%$
•$P(B) = 53\%$
$(47\% + 53\% = 1)$.

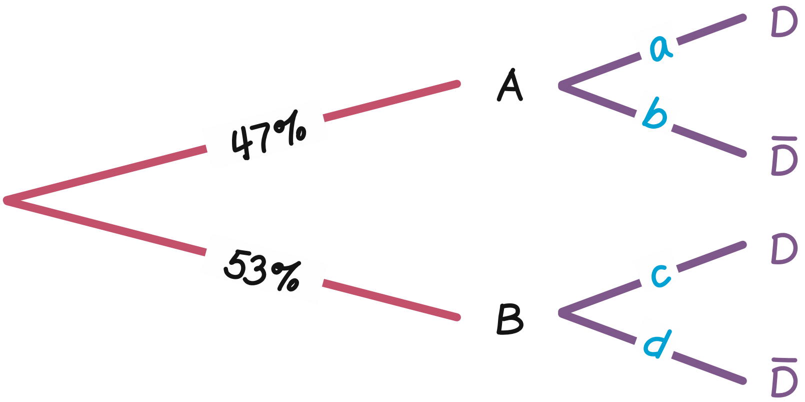
•$P_A(V) = 90\%$
•$P_A(\overline{V}) = 10\%$
$(90\% + 10\% = 1)$.

•$P_B(V) = 80\%$
•$P_B(\overline{V}) = 20\%$
$(80\% + 20\% = 1)$.

En prévision de l'élection entre les deux candidats A et B, l'institut de sondage recueille les intentions de vote des futurs électeurs.

Ainsi, l'institut peut représenter un arbre de probabilités.

D'où l'arbre de probabilités suivant:



, avec:
- $a = 90\%$
- $b = 10\%$
- $c = 80\%$
- $d = 20\%$

2. a. Calculons la probabilité que la personne interrogée dise la vérité:

L'événement $V = (V \cap A) \cup (V \cap B)$.

D'où: $P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B)$

$$= P_A(V) \times P(A) + P_B(V) \times P(B).$$

Ainsi: $P(V) = 90\% \times 47\% + 80\% \times 53\%$

$$\Rightarrow \; P(V) \approx 84.7\%.$$

Au total, 84.7% des personnes interrogées disent la vérité.

2. b. Calculons $P_V(A)$:

$$P_V(A) = \frac{P(V \cap A)}{P(V)} \iff P_V(A) = \frac{P_A(V) \times P(A)}{P(V)}.$$

Ainsi: $P_V(A) = \dfrac{90\% \times 47\%}{84.7\%} \Rightarrow P_V(A) \approx 49.9\%.$

Au total, la probabilité demandée est de: 49.9%.

3. Démontrons que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0.529:

Soit " P " cette probabilité.

La personne choisie vote effectivement pour A dans 2 cas :

$P = (V \cap A)$ et $P = (\bar{V} \cap B)$.

D'où: $P = P(V \cap A) + P(\bar{V} \cap B)$

$= P_A(V) \times P(A) + P_B(\bar{V}) \times P(B)$.

Ainsi: $P = 90\% \times 0.47 + 20\% \times 0.53$

$\Rightarrow P \approx 0.529\%$.

4. Au seuil de 95%, le candidat A peut-il croire en sa victoire ?

Ici, nous avons: • $n = 1200$

• $f = 0.529$.

Dans ces conditions:

$n = 1200 \geq 30$, $n.f = 634.8 \geq 5$ et $n.(1 - f) = 565.2 \geq 5$.

Les conditions étant réunies, un intervalle de confiance à 95% s'écrit:

$I = [f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$, cad: $I = [0.529 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0.529 + \frac{1}{\sqrt{n}}]$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [0.5001 ; 0.5579]$.

Comme $0.5 < 0.5001$, le candidat A peut croire en sa victoire.

5. Déterminons le temps moyen exprimé en heures:

150 h = temps moyen pour atteindre l'objectif.