Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 2 (6 points)

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

2. **a)** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire la valeur exacte de u_1.

3. **a)** Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ...
	| Affecter à u la valeur ...
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,6931	0,3069	0,1931	0,1402	0,1098	0,0902	0,0475	0,0099	0,0050

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4. **a)** Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

EXERCICE 2

[Liban 2015]

1. Calculons U_0:

Ici: $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $U_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

f est continue sur $[0;1]$, elle admet donc des primitives sur $[0;1]$ et par conséquent: U_0 existe.

$$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \iff U_0 = [\ln|1+x|]_0^1$$

$$\iff U_0 = [\ln(1+x)]_0^1$$

$$\Rightarrow U_0 = \ln 2.$$

Au total: $U_0 = \ln 2$.

2. a. Montrons que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} + U_n = \dfrac{1}{n+1}$:

Cela revient à calculer:

$$j = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx,$$

$$\iff j = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\right)dx.$$

Soit: $h(x) = \dfrac{x^{n+1}+x^n}{1+x}$.

h est continue sur $[0;1]$, elle admet donc des primitives sur $[0;1]$ et par conséquent: j existe.

Dans ces conditions:

$$j = \int_0^1 \left(\frac{x^n (x+1)}{1+x} \right) dx \Rightarrow j = \int_0^1 x^n \, dx.$$

D'où: $j = \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)} \right]_0^1 \Rightarrow j = \frac{1}{n+1}.$

Au total, nous avons donc bien: $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$, pour tout entier naturel n.

2. b. Déduisons-en la valeur exacte de U_1:

Nous savons que: $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$, et $U_0 = \ln 2$.

D'où: $U_1 + U_0 = \frac{1}{0+1} \Leftrightarrow U_1 + \ln 2 = 1$

$\Rightarrow U_1 = 1 - \ln 2.$

Au total: $U_1 = 1 - \ln 2.$

3. a. Recopions et complétons:

Le tableau recopié et complété est le suivant:

⋮	
Initialisation:	Affecter à u la valeur ln (2)
Traitement:	Pour i variant de 1 à n
	Affecter à u la valeur $\frac{1}{i} - u$
⋮	

3. b. Quelle conjecture ?

D'après les données du tableau, on pourrait, a priori, penser que la suite: (U_n) est strictement décroissante.

Par ailleurs, (U_n) semble positive et converger vers " 0 " (minorant).

4. a. Montrons que (U_n) est décroissante:

Il s'agit de déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

Posons: $g(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1+x}$ et $h(x) = \dfrac{x^n}{1+x}$.

Nous remarquons alors que: $g(x) = x \times h(x)$.

Or: $x \in [0;1]$, d'où nous pouvons affirmer que:

$$g(x) \leqslant h(x) \iff \frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant \frac{x^n}{1+x}.$$

Notons que:
- les fonctions g et h sont continues sur $[0;1]$;
- g et h admettent donc des primitives sur $[0;1]$, et par conséquent: $\int_0^1 g(x)\,dx$ et $\int_0^1 h(x)\,dx$ existent ;
- de plus, les fonctions g et h sont positives sur $[0;1]$;
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies:

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant \frac{x^n}{1+x} \iff 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

$$\iff 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$$

$$\implies 0 \leqslant U_{n+1} - U_n \leqslant 0.$$

Ainsi, nous pouvons affirmer que: la suite (U_n) est décroissante.

4. b. Démontrons que (U_n) est convergente:

Nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici: • (U_n) est minorée par $m = 0$, (car: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \geqslant 0$)

• (U_n) est décroissante, pour tout entier naturel n.

Donc nous pouvons affirmer que: (U_n) est convergente.

5. Soit ℓ la limite de (U_n), montrons que $\ell = 0$:

Soit ℓ la limite de (U_n), quand n tend vers $+\infty$.

Nous avons: $\left.\begin{array}{l} \bullet \displaystyle\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell \\ \\ \bullet \displaystyle\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\lim_{n \to +\infty} U_n + U_{n+1} = 2\ell.$

Or, nous avons vu que: $U_n + U_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

D'où: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (U_n + U_{n+1}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1}$

$= 0.$

Ainsi, nous obtenons l'égalité:

$2\ell = 0 \Rightarrow \ell = 0.$

Donc si ℓ est la limite de (U_n), nous avons bien: $\ell = 0$.