

# Corrigé

## Exercice 3



---

---

freemaths.fr

---

---

# LES MATHÉMATIQUES

## AU BACCALAURÉAT S

### NOMBRES COMPLEXES, BAC S

- *Affixe d'un nombre complexe*
- *Écriture algébrique d'un nombre complexe*
- *Nombre complexe conjugué*
- *Écriture géométrique d'un nombre complexe*
- *Écriture trigonométrique d'un nombre complexe*
- *Argument d'un nombre complexe*
- *Module d'un nombre complexe*
- *Partie imaginaire d'un nombre complexe*
- *Partie réelle d'un nombre complexe*
- *Représentation géométrique d'un nombre complexe*
- *Triangle équilatéral direct*

## EXERCICE 3

[ Inde, Pondichéry 2019 ]

### Partie A: Étude d'exemples

1. a. Donnons la forme algébrique des nombres complexes  $z^2$  et  $\frac{1}{z}$ :

Ici:  $z = i$ .

Dans ces conditions: •  $z^2 = -1$ ,

$$\bullet \frac{1}{z} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i \times i} \text{ cad: } \frac{1}{z} = -i.$$

Ainsi:  $z^2 = -1$  et  $\frac{1}{z} = -i$ .

1. b. Plaçons les points  $N, (-1)$  et  $P, (-i)$  sur le graphique:

Nous avons le graphique suivant avec:  $A(1), N, (-1)$  et  $P, (-i)$ .

Nous remarquons que les points  $A, N,$  et  $P,$  ne sont pas alignés.

**Graphique à la fin du corrigé!**

2. Résolvons dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + z + 1 = 0$ :

Soit l'équation:  $z^2 + z + 1 = 0$ .

$$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 \text{ cad: } \Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2 < 0.$$

D'où deux solutions dans  $\mathbb{C}$ :

- $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ ,
- $z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ .

Au total, l'équation  $z^2 + z + 1$  admet 2 solutions dans  $\mathbb{C}$ :

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

3. a. Déterminons la forme exponentielle de  $z$ ,  $z^2$  et  $\frac{1}{z}$ :

Ici:  $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

• La forme exponentielle de  $z$ :

• Le module de  $z$  est:  $\left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1$ .

• Soit  $\theta$  l'argument de  $z$ :

$$\begin{aligned} z &= 1 \times \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 1 \times (\cos(\theta) + i \sin(\theta)). \end{aligned}$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi:  $z = 1 \times e^{\frac{j2\pi}{3}}$ .

• La forme algébrique de  $z^2$ :

$$z^2 = \left(1 \times e^{\frac{j2\pi}{3}}\right)^2.$$

D'où:  $z^2 = e^{\frac{j4\pi}{3}}$ .

Ainsi:  $z^2 = e^{\frac{j4\pi}{3}} = e^{-\frac{j2\pi}{3}}$ .

• La forme algébrique de  $\frac{1}{z}$ :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{e^{\frac{j2\pi}{3}}}.$$

D'où:  $\frac{1}{z} = e^{-\frac{j2\pi}{3}}$ .

Ainsi:  $\frac{1}{z} = e^{-\frac{j2\pi}{3}}$ .

3. b. Plaçons les points  $N_2 (z^2)$  et  $P_2 \left(\frac{1}{z}\right)$  sur le graphique:

Nous avons le graphique suivant avec:  $N_2 \left(e^{-\frac{j2\pi}{3}}\right)$  et  $P_2 \left(e^{-\frac{j2\pi}{3}}\right)$ .

Nous remarquons que les points A,  $N_2$  et  $P_2$  sont alignés: normal car  $N_2$  et  $P_2$  sont confondus!

**Graphique à la fin du corrigé!**

## Partie B:

1. Établissons que pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right)$ :

Développons:  $(z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right)$ .

$$\begin{aligned} (z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right) &= z^2 - z + z - 1 + 1 - \frac{1}{z} \\ &= z^2 - \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

D'où pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ , nous avons bien:  $(z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right) = z^2 - \frac{1}{z}$ .

2. Déduisons-en que pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ , les points A, N et P sont alignés ssi  $z^2 + z + 1$  est un réel:

Pour tout  $z \neq 0$ , les points A, N et P sont alignés ssi:

les vecteurs  $\overrightarrow{PN}$  et  $\overrightarrow{PA}$  sont colinéaires.

Ici: •  $\overrightarrow{PN}$  a pour affixe:  $z^2 - \frac{1}{z}$ ,

•  $\overrightarrow{PA}$  a pour affixe:  $1 - \frac{1}{z}$ .

Or les vecteurs  $\overrightarrow{PN}$  et  $\overrightarrow{PA}$  sont colinéaires ssi il existe un nombre réel  $k$  tel que:

$$\overrightarrow{PN} = k \cdot \overrightarrow{PA}.$$

$$\text{Or: } z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PN} = (z^2 + z + 1) \overrightarrow{PA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PN} = k \cdot \overrightarrow{PA}, \text{ avec: } k = (z^2 + z + 1).$$

Donc les vecteurs  $\overline{PN}$  et  $\overline{PA}$  sont colinéaires ssi:  $k \in \mathbb{R}$ .

Ainsi: les points A, N et P sont alignés ssi  $k = z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$ .

3. Justifions que  $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$ :

Ici:  $z = x + iy$ .

$$\begin{aligned} \text{D'où: } z^2 + z + 1 &= (x + iy)^2 + (x + iy) + 1 \\ &= x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy + 1 \\ &= x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y). \end{aligned}$$

Au total, nous avons bien:  $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$ .

4. a. Déterminons l'ensemble des points M d'affixe  $z \neq 0$  tels que les points A, N et P soient alignés:

Les points M d'affixe  $z \neq 0$  tels que les points A, N et P soient alignés vérifient

le système: 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = X, X \in \mathbb{R} \\ 2xy + y = 0 \text{ car: } z^2 + z + 1 \text{ est un réel} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = X \\ y(2x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Au total, l'ensemble des points  $M$  demandé est: l'ensemble des points d'abscisse égale à  $-\frac{1}{2}$  ou d'ordonnée égale à 0, privé du point  $O(0; 0)$ .

4. b. Traçons cet ensemble de points sur le graphique:

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z \neq 0$  tels que les points  $A$ ,  $N$  et  $P$  soient alignés est représenté sur le graphique suivant:

