Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU VENDREDI 4 MAI 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire Coefficient : 7

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O\ ;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (2 ; 1 ; 4), (4 ; –1 ; 0), (0 ; 3 ; 2) et (4 ; 3 ; –2).

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2. Soit M un point de la droite (CD).

a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées (3 ; 3 ; –1). Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm².

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

d. Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD), a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

EXERCICE 4

[Inde, Pondichéry 2018]

1. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (CD):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite (CD) passe par le point $C\,(0\,;\,3\,;\,2)$,

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (CD) est: $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$,

cad: $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, car: $C\,(0\,;\,3\,;\,2)$ et $D\,(4\,;\,3\,;\,-2)$.

D'où une représentation paramétrique de la droite (CD) passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}\,(4\,;\,0\,;\,-4)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 3 \qquad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - 4t \end{cases}$$

Au total, une représentation paramétrique de la droite (CD) est:

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 3 \qquad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - 4t \end{cases}$$

2. a. Déterminons les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale:

Soit M un point de la droite (CD) avec: $M\,(x\,;y\,;z)$.

Les coordonnées x, y et z du point M vérifient donc:

$x_M = 4t,\ y_M = 3$ et $z_M = 2 - 4t, t \in \mathbb{R}$.

Comme le point B $(4\,;-1\,;0)$, la distance BM est donc égale à:

$$BM = \sqrt{(4t-4)^2 + (3+1)^2 + (2-4t)^2}$$

$$= \sqrt{16t^2 + 16 - 32t + 16 + 4 + 16t^2 - 16t}$$

$$= \sqrt{32t^2 - 48t + 36}$$

$= 2\sqrt{8t^2 - 12t + 9} > 0,$ car c'est une distance et $B \neq M$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(t) = 2\sqrt{8t^2 - 12t + 9}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et par conséquent:

$f'(t) = \dfrac{16t - 12}{\sqrt{8t^2 - 12t + 9}}$, avec: $\sqrt{8t^2 - 12t + 9} > 0$.

Dans ces conditions, la distance BM est minimale quand: $f'(t) = 0$.

$f'(t) = 0 \iff 16t - 12 = 0 \iff t = \frac{3}{4}$.

Ainsi, les coordonnées du point M sont: $x_M = 3$, $y_M = 3$ et $z_M = -1$.

Au total, la distance BM est minimale quand: $M(3;3;-1)$.

2. b. Vérifions que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires:

Les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires ssi $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Or: • $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et: • $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

D'où les droites (BH) et (CD) sont orthogonales car:

$$(-1 \times 4) + (4 \times 0) + (-1 \times (-4)) = 0.$$

Au total: les droites (BH) et (CD) sont bien perpendiculaires.

2. c. Montrons que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm²:

D'après la question précédente, nous pouvons dire que BH correspond à la hauteur issue du point B du triangle (BCD).

Dans ces conditions, l'aire du triangle BCD est: $\mathcal{A} = \frac{BH \times CD}{2}$

$$= \frac{(3\sqrt{2}) \times (4\sqrt{2})}{2}.$$

En effet: $BH = 3\sqrt{2}$ et $CD = 4\sqrt{2}$.

Au total, l'aire du triangle BCD est bien: $\mathcal{A} = 12$ cm².

3. a. Montrons que le vecteur $\vec{n}$ (2 ; 1 ; 2) est un vecteur normal du plan (BCD):

D'après le cours: un vecteur $\vec{n}$ (a ; b ; c) est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Ici:
- il s'agit du plan (BCD);
- 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont: $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$;
- $\vec{n}$ (2 ; 1 ; 2).

De plus:
- $\vec{n}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux car: $(2 \times 4) + (1 \times 0) + (2 \times (-4)) = 0$;
- $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux car: $(2 \times (-4)) + (1 \times 4) + (2 \times 2) = 0$.

Par conséquent: $\vec{n}$ est bien un vecteur normal au plan (BCD).

3. b. Déterminons une équation cartésienne du plan (BCD):

Ici:
- $\vec{n}$ ($a = 2$; $b = 1$; $c = 2$);
- C (0 ; 3 ; 2) est un point de l'espace.

D'où, une équation cartésienne du plan (BCD) passant par C (0 ; 3 ; 2) et de vecteur normal $\vec{n}$ est: $a\,(x - x_C) + b\,(y - y_C) + c\,(z - z_C) = 0$

$$\iff 2\,(x - 0) + 1\,(y - 3) + 2\,(z - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + y + 2z - 7 = 0.$$

Au total, une équation cartésienne du plan (BCD) est: $2x + y + 2z - 7 = 0$.

3. c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD):

Comme la droite Δ passe par le point A et est orthogonale au plan (BCD), nous pouvons affirmer que cette droite Δ passe par le point A (2 ; 1 ; 4) et a pour vecteur directeur, le vecteur $\vec{n}$ (2 ; 1 ; 2).

Dans ces conditions, une représentation paramétrique de Δ est:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Au total, une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et perpendiculaire au plan (BCD) s'écrit: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

3. d. **Montrons que $I\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$:**

Le point I est le point d'intersection de la droite Δ et du plan (BCD).

Soit $I\,(x_I \,;\, y_I \,;\, z_I)$, un point appartenant à la droite Δ.

Dans ces conditions: $\begin{cases} x_I = 2 + 2t \\ y_I = 1 + t \\ z_I = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

De plus, I appartient aussi au plan (BCD), donc ses coordonnées vérifient:

$$2x + y + 2z - 7 = 0.$$

D'où: $2x_I + y_I + 2z_I - 7 = 0 \iff 2\,(2 + 2t) + (1 + t) + 2\,(4 + 2t) = 7$

$$\Rightarrow t = -\frac{2}{3}.$$

Dans ces conditions, les coordonnées du point I sont:

$$\begin{cases} x_I = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ y_I = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z_I = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}.$$

Au total, la droite Δ coupe le plan (BCD) au point: $I\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

4. Calculons le volume du tétraèdre ABCD:

Le volume du tétraèdre ABCD est:

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}.$$

Ici: • Aire de la base $= \mathcal{A}$,

• Hauteur $= AI$.

Or: • $\mathcal{A} = 12 \text{ cm}^2$,

• $AI = 2$, car: $AI^2 = \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)^2$.

D'où: $V = \frac{1}{3} \times 12 \times 2$ cad: $V = 8 \text{ cm}^3$.

En conclusion, le volume du tétraèdre ABCD est: $V = 8 \text{ cm}^3$.