

# Corrigé

## Exercice 3



---

---

freemaths.fr

---

---

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU VENDREDI 4 MAI 2018

## MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire Coefficient : 7

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

### EXERCICE 3 (5 points)

*Commun à tous les candidats*

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités.

Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin ».

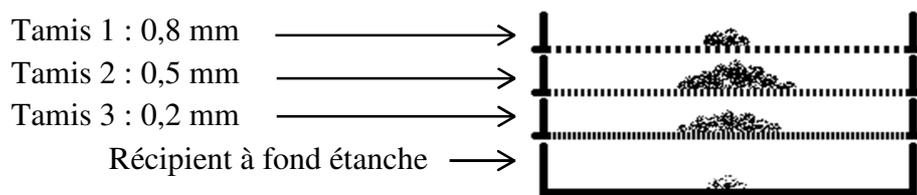
*Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

#### Partie A

Pour calibrer le sucre en fonction de la taille de ses cristaux, on le fait passer au travers d'une série de trois tamis positionnés les uns au-dessus des autres et posés sur un récipient à fond étanche.

Les ouvertures des mailles sont les suivantes :



Les cristaux de sucre dont la taille est inférieure à 0,2 mm se trouvent dans le récipient à fond étanche à la fin du calibrage. Ils seront conditionnés dans des paquets portant le label « sucre extra fin ».

1. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation U. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire  $X_U$  qui suit la loi normale de moyenne  $\mu_U = 0,58$  mm et d'écart type  $\sigma_U = 0,21$  mm.

a. Calculer les probabilités des événements suivants :  $X_U < 0,2$  et  $0,5 \leq X_U < 0,8$ .

b. On fait passer 1 800 grammes de sucre provenant de l'exploitation U au travers de la série de tamis.

Déduire de la question précédente une estimation de la masse de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche et une estimation de la masse de sucre récupérée dans le tamis 2.

2. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation V. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire  $X_V$  qui suit la loi normale de moyenne  $\mu_V = 0,65$  mm et d'écart type  $\sigma_V$  à déterminer.

Lors du calibrage d'une grande quantité de cristaux de sucre provenant de l'exploitation V, on constate que 40 % de ces cristaux se retrouvent dans le tamis 2.

Quelle est la valeur de l'écart type  $\sigma_V$  de la variable aléatoire  $X_V$  ?

## Partie B

Dans cette partie, on admet que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et que 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extra fin.

On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.

On considère les événements suivants :

- $U$  : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U » ;
- $V$  : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V » ;
- $E$  : « Le paquet porte le label "extra fin" ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V, sans mélanger les sucres des deux exploitations.
  - a. Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?
  - b. Sachant qu'un paquet porte le label « extra fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?

2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ?

*Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.*

## Partie C

1. L'entreprise annonce que 30 % des paquets de sucre portant le label « extra fin » qu'elle conditionne contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

Avant de valider une commande, un acheteur veut vérifier cette proportion annoncée. Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets, 30 contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

A-t-il des raisons de remettre en question l'annonce de l'entreprise ?

2. L'année suivante, l'entreprise déclare avoir modifié sa production. L'acheteur souhaite estimer la nouvelle proportion de paquets de sucre provenant de l'exploitation U parmi les paquets portant le label « extra fin ». Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets 42 % contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, de la nouvelle proportion de paquets labellisés « extra fin » contenant du sucre provenant de l'exploitation U.

## EXERCICE 3

[ Inde, Pondichéry 2018 ]

### Partie A:

1. a. Calculons  $P(X_u < 0,2)$  et  $P(0,5 \leq X_u < 0,8)$ :

D'après l'énoncé, nous savons que:

- $X_u$  suit la loi normale d'espérance  $\mu = 0,58$  mm et d'écart type  $\sigma = 0,21$  mm.
- $T$  suit la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned} \bullet P(X_u < 0,2) &= P\left(\frac{X_u - \mu}{\sigma} < \frac{0,2 - 0,58}{0,21}\right) \\ &= P(T < -1,80952) \\ &= 1 - P(T < 1,80952). \end{aligned}$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X_u < 0,2) \approx 0,035.$$

$$\bullet P(0,5 \leq X_u < 0,8) = ?$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(0,5 \leq X_u < 0,8) \approx 0,501.$$

Au total, nous avons:  $P(X_u < 0,2) \approx 3,5\%$  et  $P(0,5 \leq X_u < 0,8) \approx 50,1\%$ .

1. b. Déduisons-en une estimation de la masse de sucre récupérée dans le tamis 2 et le récipient à fond étanche:

- Comme  $P(0,5 \leq X_u < 0,8) \approx 50,1\%$ , nous pouvons affirmer que la masse de sucre récupérée dans le tamis 2 est d'environ:

$$1800 \text{ grammes} \times 50,1\% = 901,8 \text{ grammes.}$$

- Comme  $P(X_u < 0,2) \approx 3,5\%$ , nous pouvons affirmer que la masse de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche est d'environ:

$$1800 \text{ grammes} \times 3,5\% = 63 \text{ grammes.}$$

2. Déterminons la valeur de l'écart type  $\sigma$  de la variable aléatoire  $X_v$ :

D'après l'énoncé, nous savons que:

- $X_v$  suit la loi normale d'espérance  $\mu = 0,65$  mm et d'écart type  $\sigma = ?$
- $T$  suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de déterminer  $\sigma$  sachant que:  $P(0,5 \leq X_v < 0,8) = 40\%$ .

$$P(0,5 \leq X_v < 0,8) = 40\% \Leftrightarrow P\left(\frac{0,5 - 0,65}{\sigma} < \frac{X_v - \mu}{\sigma} < \frac{0,8 - 0,65}{\sigma}\right) = 40\%$$

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{0,15}{\sigma} < T < \frac{0,15}{\sigma}\right) = 40\%$$

$$\Leftrightarrow 2P\left(T < \frac{0,15}{\sigma}\right) - 1 = 40\%$$

$$\text{cad: } P\left(T < \frac{0,15}{\sigma}\right) = 70\%.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{0,15}{\sigma} \approx 0,5244 \Rightarrow \sigma \approx 0,286 \text{ mm.}$$

Au total, la valeur de l'écart type  $\sigma$  de la variable aléatoire  $X_v$  est:

$$\sigma \approx 0,286 \text{ mm.}$$

## Partie B:

1. a. Déterminons la probabilité que le paquet prélevé porte le label "extra fin":

D'après l'énoncé, nous avons:

- $U$  = " le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation  $U$  ".
- $V$  = " le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation  $V$  ".
- $E$  = " le paquet porte le label extra fin ".
- $\bar{E}$  = " le paquet ne porte pas le label extra fin ".
  
- $P(U) = 30\%$
- $P(V) = 1 - 30\% = 70\%$ .
  
- $P_U(E) = 3\%$
- $P_U(\bar{E}) = 1 - 3\% = 97\%$ .
  
- $P_V(E) = 5\%$
- $P_V(\bar{E}) = 1 - 5\% = 95\%$ .

Ici nous devons calculer:  $P(E)$ .

Or, l'événement  $E = (E \cap U) \cup (E \cap V)$ .

$$\begin{aligned} \text{D'où: } P(E) &= P(E \cap U) + P(E \cap V) \\ &= P_U(E) \times P(U) + P_V(E) \times P(V). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi: } P(E) = 3\% \times 30\% + 5\% \times 70\% \Rightarrow P(E) = 4,4\%.$$

*Au total, la probabilité que le paquet prélevé porte le label extra fin est de: 4,4%.*

**1. b. Calculons  $P_E(U)$ :**

$$\begin{aligned} P_E(U) &= \frac{P(E \cap U)}{P(E)} \\ &= \frac{P_U(E) \times P(U)}{P(E)}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi: } P_E(U) = \frac{3\% \times 30\%}{4,4\%} \Rightarrow P_E(U) = 20,46\%.$$

*Au total, la probabilité demandée est d'environ: 20,46%.*

**2. Déterminons comment l'entreprise doit s'approvisionner auprès des exploitations U et V:**

Soit  $x = P(U)$ ,  $P(U)$  étant la probabilité que le paquet contienne du sucre provenant de l'exploitation U.

On désire:  $P_E(U) = 30\%$ , avec:  $x = P(U)$ .

$$\text{Or: } P_E(U) = 30\% \Leftrightarrow \frac{P_U(E) \times x}{P_U(E) \times x + P_V(E) \times (1-x)} = 30\%$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{3x + 5(1-x)} = 30\%$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{-2x+5} = 30\%$$

$$\Rightarrow x \approx 0,417.$$

Au total, pour que 30% des paquets portant le label **extra fin** proviennent de l'exploitation U: l'entreprise doit s'approvisionner à hauteur de 41,7% auprès de l'exploitation U et à hauteur de 58,3% auprès de l'exploitation V.

### Partie C:

1. A-t-il des raisons de remettre en question l'annonce de l'entreprise ?

- Ici, nous avons:
- $n = 150$
  - $p = 30\%$
  - $f = \frac{30}{150} \Rightarrow f = 20\%$ .

Dans ces conditions:

$$n = 150 \geq 30, n \cdot p = 45 \geq 5 \text{ et } n \cdot (1 - p) = 105 \geq 5.$$

Les conditions sont donc réunies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% s'écrit:

$$I = \left[ p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

$$\text{cad: } I = \left[ 30\% - 1,96 \times \sqrt{\frac{30\% \times 70\%}{150}}; 30\% + 1,96 \times \sqrt{\frac{30\% \times 70\%}{150}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:  $I \approx [22,66\%; 37,33\%]$ .

Or la fréquence "f", sur l'échantillon, est telle que:  $f = 20\% \notin I$ .

Ainsi, oui l'acheteur a des raisons de remettre en question l'annonce de l'entreprise.

**2. Donnons un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95%, de la nouvelle proportion de paquets labellisés "extra fin" provenant de l'exploitation U:**

D'après le cours, nous savons qu'un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95%, nous est donné par la formule suivante:

$$I = \left[ f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right],$$

avec ici: •  $n = 150 \geq 30$ ,

•  $f = 42\%$ ,

•  $n \cdot f = 63 \geq 5$  et  $n \cdot (1 - f) = 87 \geq 5$ .

D'où:  $I = \left[ 42\% - \frac{1}{\sqrt{150}}; 42\% + \frac{1}{\sqrt{150}} \right] \Rightarrow I \approx [33,84\%; 50,16\%]$ .

Au total, l'intervalle de confiance demandé est:  $I \approx [33,84\%; 50,16\%]$ .