Corrigé
Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le sujet comporte deux feuilles d'annexes à la page 8/9 et 9/9, à remettre avec la copie.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$u_0 = v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$.

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

Partie A : Conjectures

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites ?

2. Soit n un entier naturel.
Conjecturer la valeur de PGCD$(u_n ; v_n)$. Aucune justification n'est demandée.

3. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Flore obtient les résultats suivants :

12	10	1258291	838861
13	11	5033165	3355443
14	12	20132659	13421773
15	13	80530637	53687091

Elle émet la conjecture : « la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge ».

Qu'en penser ?

Partie B : Étude arithmétique

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.

2. Soit n un entier naturel.
Déduire de la question précédente la valeur de PGCD$(u_n ; v_n)$.

Partie C : Étude matricielle

Pour tout entier naturel n, on définit :

- la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,
- les matrices carrées $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3\times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que la matrice $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P.

b. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = Q_n P^{-1} X_0$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases} u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} + 3\times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}$.

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}$.

b. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

EXERCICE 4

[Inde, Pondichéry 2017]

Partie A: Conjectures

1. Déterminons les formules qui ont été entrées dans les cellules B_3 et C_3:

Les formules sont:

- En B_3: on entre << = 2 * B_2 + 3 * C_2 >>.
- En C_3: on entre << = 2 * B_2 + C_2 >>.

2. Conjecturons la valeur de PGCD (U_n ; V_n):

En lisant la copie d'écran, nous constatons que:

PGCD (1; 1) = PGCD (5 ; 3) = PGCD (19; 13) = PGCD (77 ; 51) = PGCD (307 ; 805)

= 1.

Dans ces conditions, la conjecture que nous pouvons émettre sur la valeur du PGCD (U_n ; V_n) est:

" on pourrait, a priori, penser que: **PGCD (U_n ; V_n) = 1** ".

3. Qu'en pensons nous ?

Notons que: $\dfrac{U_{10}}{V_{10}} \approx 1,50$, $\dfrac{U_{11}}{V_{11}} \approx 1,50$, $\dfrac{U_{12}}{V_{12}} \approx 1,50$ et $\dfrac{U_{13}}{V_{13}} \approx 1,50$.

Dans ces conditions, la conjecture émise par Flore selon laquelle " **la suite $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ converge** " semble, a priori, bonne.

De plus, la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ paraît converger vers: " 1, 50 ".

Au total: **oui**, la conjecture émise par Flore est, a priori, valide.

Partie B: Étude arithmétique

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2U_n - 3V_n = (-1)^{n+1}$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $2U_n - 3V_n = (-1)^{n+1}$ ".

Initialisation: • $2U_0 - 3V_0 = (-1)^{0+1}$?

oui car: $2U_0 - 3V_0 = 2 \times 1 - 3 \times 1 \Rightarrow 2U_0 - 3V_0 = -1$,

et $(-1)^{0+1} = -1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $2U_n - 3V_n = (-1)^{n+1}$

et montrons qu'alors: $2U_{n+1} - 3V_{n+1} = (-1)^{n+2}$.

Supposons: $\underset{(1)}{2U_n - 3V_n = (-1)^{n+1}}$, pour un entier naturel n fixé.

Préalablement, nous avons:

$$\begin{cases} 2U_n + 3V_n = U_{n+1} \\ 2U_n + V_n = V_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_n = \frac{1}{4}(-U_{n+1} + 3V_{n+1}) \\ V_n = \frac{1}{2}(U_{n+1} - V_{n+1}) \end{cases}.$$

D'où: $(1) \Rightarrow 2\left(\frac{1}{4}(-U_{n+1} + 3V_{n+1})\right) - 3\left(\frac{1}{2}(U_{n+1} - V_{n+1})\right) = (-1)^{n+1}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}U_{n+1} + \frac{3}{2}V_{n+1} - \frac{3}{2}U_{n+1} + \frac{3}{2}V_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow -2U_{n+1} + 3V_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{2U_{n+1} - 3V_{n+1}}{(-1)} = (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2U_{n+1} - 3V_{n+1} = (-1)^{n+1} \times (-1)$$

$$\Rightarrow 2U_{n+1} - 3V_{n+1} = (-1)^{n+2}.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons: $2U_n - 3V_n = (-1)^{n+1}$.

2. Déduisons-en PGCD $(U_n ; V_n)$:

Pour répondre à cette question, nous allons appliquer le théorème de **BÉZOUT**.

D'après ce théorème: " Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont premiers entre eux ssi il existe deux entiers u et v tels que: $a \cdot u + b \cdot v = 1$ ".

D'après la question précédente, nous avons: $2U_n - 3V_n = (-1)^{n+1}$ (1).

$(1) \iff (-1)^{n+1} \times [2U_n - 3V_n] = (-1)^{n+1} \times [(-1)^{n+1}]$

$\iff U_n \times u + V_n \times v = 1$, avec: $u = (-1)^{n+1} \times 2$ et $v = (-1)^{n+1} \times (-3)$.

Comme U_n et V_n sont deux entiers relatifs non nuls, nous pouvons affirmer qu'ils sont premiers entre eux car: il existe bien deux entiers relatifs $u \,(= (-1)^{n+1} \times 2)$ et $v \,(= (-1)^{n+1} \times (-3))$ tels que $U_n \times u + V_n \times v = 1$.

Au total: pour tout entier naturel n, U_n et V_n sont premiers entre eux et nous avons donc PGCD $(U_n ; V_n) = 1$.

Partie C: Étude matricielle

1. a. Montrons que $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P:

La matrice $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P ssi:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or: $$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Au total: la matrice $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est bien l'inverse de P.

1. b. Calculons U_n et V_n:

Ici: $X_n = Q_n\, P^{-1}\, X_0 \iff \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{2U_0 - 3V_0}{5} \\ \dfrac{U_0 + V_0}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

(car: $U_0 = 1$ et $V_0 = 1$)

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{6}{5}\,2^n \\ -\frac{1}{5}(-1)^{n+1} + \frac{2}{5}\,2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Au total, nous avons bien:

$$\begin{cases} U_n = \frac{1}{5}\left(-(-1)^n + 6 \times 2^n\right) \\ V_n = \frac{1}{5}\left(-(-1)^{n+1} + 2 \times 2^{2n+1}\right) \end{cases} \text{ ou encore: } \begin{cases} U_n = \frac{1}{5}\left((-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}\right) \\ V_n = \frac{1}{5}\left((-1)^n + 2^{2n+2}\right) \end{cases}.$$

2. a. Calculons $\frac{U_n}{V_n}$, pour tout entier naturel n:

Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$\frac{U_n}{V_n} = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{(-1)^n + 2^{2n+2}}$$

$$= \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}, \text{ car: } 2^{2n+2} = 2 \times 2^{2n+1}.$$

Ainsi: nous obtenons bien le rapport désiré, pour tout entier naturel n.

2. b. Déduisons la limite de la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \frac{3}{2}, \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} = 0.$$

Au total, la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est convergente et converge vers la limite finie $\frac{3}{2}$.

Cela confirme l'idée de Flore: " la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ converge ".