Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le sujet comporte deux feuilles d'annexes à la page 8/9 et 9/9, à remettre avec la copie.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A, B *et* C *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

A l'évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;
C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0{,}03x + 0{,}95$.

2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable. Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans.
Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.

2. Calculer $P(\mathrm{Z} > 2)$.

3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

Partie C

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Calculer $P(83 \leqslant X \leqslant 87)$.
   Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage ?
2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que :
   $P(85 - a \leqslant X \leqslant 85 + a) = 0,9$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. La chocolaterie vend un lot de 10 000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle $[81,7 \; ; \; 88,3]$.

   Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère.

   Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?

EXERCICE 1

[Inde, Pondichéry 2017]

Partie A:

1. Montrons que $P(C) = 0,03x + 0,95$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- $P_A(C) = 98\%$,
- $P_B(C) = P_{\bar{A}}(C) = 95\%$,
- $P(A) = P($" la tablette de chocolat provient de la chaîne A "$) = x$,
- $P(B) = 1 - P(A) = 1 - x$ ou $P(B) = P(\bar{A}) = y$,
- $C =$ " la tablette de chocolat est commercialisable ".

Il s'agit de calculer $P(C)$.

Or, l'événement $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$.

D'où: $P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B)$

$= P_A(C) \times P(A) + P_B(C) \times P(B)$.

Ainsi: $P(C) = 98\% \times x + 95\% \times y$

$= 98\% \times x + 95\% \times (1 - x)$

=> $P(C) = 0,03x + 0,95$.

Au total, nous avons bien: $P(C) = 0,03\,x + 0,95$.

2. Montrons que $P(B) = 2 \times P(A)$, sachant que $P(C) = 96\%$:

Nous savons que: $P(C) = 0,03x + 0,95$ et $P(C) = 96\%$.

Dans ces conditions: $0,03x + 0,95 = 0,96 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.

Comme $y = 1 - x$, nous avons: $y = \frac{2}{3}$.

Ainsi: $y = 2 \times x$ ou $P(B) = 2 \times P(A)$.

Partie B:

1. Déterminons le paramètre λ:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- Z suit une loi exponentielle de paramètre: $\lambda = ?$

Dans ces conditions:

- $f(z) = \lambda\, e^{-\lambda z}$, pour tout $z \in [\,0\,; +\infty\,[$.
- $P(Z \leqslant a) = \int_0^a f(z)\,dz$.
- $E(Z) = \frac{1}{\lambda} = 5$ ans.

Comme la durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans, nous pouvons écrire: $E(Z) = 5 \iff \frac{1}{\lambda} = 5 \Rightarrow \lambda = 0,2$.

Au total: Z est une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

2. Calculons $P(Z > 2)$:

$P(Z > 2) = 1 - P(Z \leqslant 2)$

$= 1 - \left(-\left[e^{-0,2z}\right]_0^2\right)$, car: $\lambda = 0,2$

$= 1 - (1 - e^{-0,4})$

$\Rightarrow$ $P(Z > 2) = e^{-0,4}$, cad: $P(Z > 2) \approx 0,67$.

Au total: $P(Z > 2) \approx 67\%$.

3. Sachant que la machine a déjà fonctionné pendant 3 ans, déterminons la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans:

Il s'agit de calculer: $P_{(Z \geqslant 3)}(Z \geqslant 5)$.

Or: $P_{(Z \geqslant 3)}(Z \geqslant 5) = P(Z \geqslant 2)$, car la loi exponentielle est une loi de durée sans vieillissement.

Ainsi: $P_{(Z \geqslant 3)}(Z \geqslant 5) \approx 67\%$.

Au total: $P_{(Z \geqslant 3)}(Z \geqslant 5) \approx 67\%$.

Partie C:

1. a. Calculons $P(83 \leqslant X \leqslant 87)$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 85\%$ et d'écart type $\sigma = 2\%$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Nous savons que: $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683$.

Or ici, nous remarquons: $83 = \mu - \sigma$ et $87 = \mu + \sigma$.

D'où: $P(83 \leqslant X \leqslant 87) \approx 0,683$.

Au total, nous pouvons affirmer que: $P(83 \leqslant X \leqslant 87) \approx 68,3\%$.

1. b. Déterminons la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2% du pourcentage annoncé sur l'emballage:

Soit P_1, la probabilité demandée.

$P_1 = 1 - P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$

$\approx 1 - 68,3\%$

$\Rightarrow P_1 \approx 0,317$.

Ainsi la probabilité demandée est d'environ: 31,7%.

2. Déterminons la valeur du réel " a " sachant que $P(85 - a \leqslant X \leqslant 85 + a) = 0,9$:

- $P(85 - a \leqslant X \leqslant 85 + a) = P\left(\dfrac{85 - a - \mu}{\sigma} \leqslant \dfrac{X - \mu}{\sigma} \leqslant \dfrac{85 + a - \mu}{\sigma}\right)$

$= P\left(\dfrac{-a}{2} \leqslant T \leqslant \dfrac{a}{2}\right)$, car: $\mu = 85\%$ et $\sigma = 2\%$

$= 2\,P\left(T \leqslant \dfrac{a}{2}\right) - 1$.

- Dans ces conditions: $P(85 - a \leqslant X \leqslant 85 + a) = 0,9 \iff 2\,P\left(T \leqslant \dfrac{a}{2}\right) - 1 = 0,9$

$\Rightarrow P\left(T \leqslant \dfrac{a}{2}\right) = 0,95$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{a}{2} \approx 1,645 \Rightarrow a \approx 3,29\%.$$

Au total, $P(85 - a \leqslant X \leqslant 85 + a) = 0,9$ avec: $a \approx 3,29\%$.

3. Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?

Ici, nous avons:
- $n = 550$
- $p = 90\%$
- $f = 1 - \frac{80}{550} \Rightarrow f \approx 0,8545$.

Dans ces conditions:

$n = 550 \geqslant 30$, $n \cdot p = 495 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - p) = 55 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon de 550 tablettes au hasard dans le lots de 10 000 tablettes de chocolat.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

cad: $I = \left[0,9 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,9 \times 0,1}{550}} ; 0,9 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,9 \times 0,1}{550}} \right]$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 0,875 \,;\, 0,925 \,]$.

Or la fréquence observée de tablettes de chocolat conformes " f ", dans l'échantillon, est telle que: $f \approx 0,8545 \notin I$.

Ainsi, au seuil de 95%, l'affirmation de la chocolaterie est erronée.