Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le sujet comporte deux feuilles d'annexes à la page 8/9 et 9/9, à remettre avec la copie.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3080	1024
13	11	6153	2048
14	12	12298	4096
15	13	24587	8192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

EXERCICE 4

[Inde, Pondichéry 2017]

Partie A: Conjectures

1. Déterminons les formules qui ont été entrées dans les cellules B_3 et C_3:

Les formules sont:

- En B_3: on entre << = 2 ^ B_2 - A_2 + 3 >>.
- En C_3: on entre << = 2 ^ A_3 >>.

2. Conjecturons les limites des suites (U_n) et $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$:

2. a. En ce qui concerne la suite (U_n) :

En lisant la copie d'écran, nous constatons que:

$$U_0 < U_1 < U_2 < U_3 < \ldots < U_{12} < U_{13} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty .$$

Dans ces conditions, la conjecture que nous pouvons émettre sur le sens de variation et la limite de la suite (U_n) est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite (U_n) est croissante et elle semble converger vers l'infini quand n tend vers $+\infty$ ".

2. b. En ce qui concerne la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons, à partir de $n = 3$:

$$\frac{U_3}{V_3} > \ldots > \frac{U_{12}}{V_{12}} > \frac{U_{13}}{V_{13}}.$$

Dans ces conditions, la conjecture que nous pouvons émettre sur le sens de variation et la limite de la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est décroissante à partir de $n \geqslant 3$ et elle semble converger vers 3 quand n tend vers l'infini ".

Au total, il semble que:
- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{U_n}{V_n}\right) = 3.$

Partie B: Étude de la suite (U_n)

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$ ".

Initialisation: • $U_0 = 3 \times 2^0 + 0 - 2$?

Oui car: $U_0 = 1$ et $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = 3 \times 2^1 + 1 - 2$?

Oui car: $U_1 = 5$ et $3 \times 2^1 + 1 - 2 = 5$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$
et montrons qu'alors: $U_{n+1} = 3 \times 2^{(n+1)} + (n+1) - 2$.

Supposons: $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$$(1) \Rightarrow 2\,U_n = 3 \times 2 \times 2^n + 2n - 4 \quad (U_{n+1} = 2\,U_n - n + 3)$$

$$\Rightarrow 2\,U_n = 3 \times 2^{(n+1)} + 2n - 4$$

$$\Rightarrow 2\,U_n - n + 3 = 3 \times 2^{(n+1)} + 2n - 4 - n + 3$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = 3 \times 2^{(n+1)} + n - 1$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = 3 \times 2^{(n+1)} + (n+1) - 2.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons: $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. Déterminons la limite de la suite (U_n):

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 3 \times 2^n + n - 2$$

$$= +\infty \quad \text{car: } 2 > 1 \text{ et donc: } \lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty.$$

Ainsi, la suite (U_n) est divergente.

3. Déterminons le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million:

Il s'agit de déterminer l'entier naturel minimal " x " tel que: $U_x \geq 1$ million.

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons:

$x = 19$ car $U_{19} \approx 1{,}572$ millions et $U_{18} \approx 0{,}787$ million.

Au total, le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million est: 19.

Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$

1. Démontrons que la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3 :

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de :

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n}.$$

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n} = \left(\frac{3 \times 2^{(n+1)} + (n+1) - 2}{2^{(n+1)}}\right) - \left(\frac{3 \times 2^n + n - 2}{2^n}\right)$$

$$= \left(3 + \frac{(n+1) - 2}{2^{(n+1)}}\right) - \left(3 + \frac{n-2}{2^n}\right)$$

$$= \left(\frac{n-1}{2^{(n+1)}}\right) - \left(\frac{n-2}{2^n}\right)$$

$$= \frac{(n-1) - 2(n-2)}{2^{(n+1)}}$$

$$= \frac{-n+3}{2^{(n+1)}}.$$

Dans ces conditions : $\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n} \leqslant 0$ ssi $-n+3 \leqslant 0$ cad ssi $n \geqslant 3$.

Au total : la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est bien décroissante à partir du rang 3.

2. Déterminons la limite de la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3 \times 2^n + n - 2}{2^n} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(3 + \frac{n}{2^n} - \frac{2}{2^n} \right)$$

$$= 3 \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^n} = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} - \frac{2}{2^n} = 0.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est convergente et converge vers " 3 ".