Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le sujet comporte deux feuilles d'annexes à la page 8/9 et 9/9, à remettre avec la copie.

EXERCICE 2 (3 points)

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

1. On considère l'équation $(E): z^2 - 6z + c = 0$ où c est un réel strictement supérieur à 9.

a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

b. Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + \mathrm{i}\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - \mathrm{i}\sqrt{c-9}$.

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B.
Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

EXERCICE 2

[Inde, Pondichéry 2017]

1. a. Justifions que l'équation (E) admet deux solutions complexes non réelles:

L'équation (E) est: $z^2 - 6z + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $c > 9$.

$\Delta = 36 - 4c < 0$ car: $c > 9$.

Ainsi, comme $\Delta < 0$: l'équation (E) admet bien deux solutions complexes non réelles conjuguées z_A et z_B.

1. b. Déterminons les deux solutions de l'équation (E):

$\Delta = 36 - 4c < 0$, d'où 2 solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_A = \dfrac{6 + i\sqrt{-\Delta}}{2}$ (car: $\Delta = i^2 \times (-\Delta)$)

$$= \frac{6 + i\sqrt{4c - 36}}{2}$$

$$= \frac{6 + i\sqrt{2^2(c-9)}}{2}$$

$$= \frac{6 + 2i\sqrt{c-9}}{2}$$

=> $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$,

- $z_B = \dfrac{6 - i\sqrt{-\Delta}}{2}$ (car: $\Delta = i^2 \times (-\Delta)$)

=> $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

Au total, les deux solutions complexes non réelles conjuguées, de l'équation (E) sont bien: $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

2. Justifions que le triangle OAB est isocèle en O:

Soient les points: $O(z_0)$, $A(z_A)$ et $B(z_B)$,

avec: $z_0 = 0$, $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

OAB est un triangle isocèle en O ssi: $OA = OB$.

Or: • $OA = |z_A - z_0| \iff OA = |3 + i\sqrt{c-9}| \Rightarrow OA = \sqrt{c}$,

• $OB = |z_B - z_0| \iff OB = |3 - i\sqrt{c-9}| \Rightarrow OB = \sqrt{c}$.

Au total, comme $OA = OB$: le triangle OAB est bien isocèle en O.

3. Déterminons la valeur réelle de " c " telle que le triangle OAB soit rectangle en O:

Le triangle OAB est rectangle en O ssi: $\dfrac{z_B - z_0}{z_A - z_0}$ est un imaginaire pur.

(d'après le cours)

Ici: • $z_B - z_0 = 3 - i\sqrt{c-9}$,

• $z_A - z_0 = 3 + i\sqrt{c-9}$.

D'où: $$\frac{z_B - z_0}{z_A - z_0} = \frac{3 - i\sqrt{c-9}}{3 + i\sqrt{c-9}}$$

$$= \frac{(3 - i\sqrt{c-9}) \times (3 - i\sqrt{c-9})}{(3 + i\sqrt{c-9}) \times (3 - i\sqrt{c-9})}$$

$$= \frac{9 + i^2(c-9) - 6i\sqrt{c-9}}{3^2 + c - 9}$$

$$= \frac{18 - c}{c} - \frac{6\,i\sqrt{c-9}}{c}.$$

Dans ces conditions, $\dfrac{z_B - z_0}{z_A - z_0}$ est un imaginaire pur ssi:

$$\frac{18 - c}{c} = 0 \text{ cad: } \quad c = 18.$$

Au total, le triangle OAB est rectangle en O ssi: $c = 18 > 9$.