Corrigé

Exercice 5

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,

conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 10 pages numérotées de 1/10 à 10/10.

Le sujet comporte une feuille d'annexe à la page 10/10 à remettre avec la copie.

EXERCICE 5 (5 points)

Commun à tous les candidats

On souhaite stériliser une boîte de conserve.

Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25°\text{C}$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100°\text{C}$.

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.
   Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.

On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

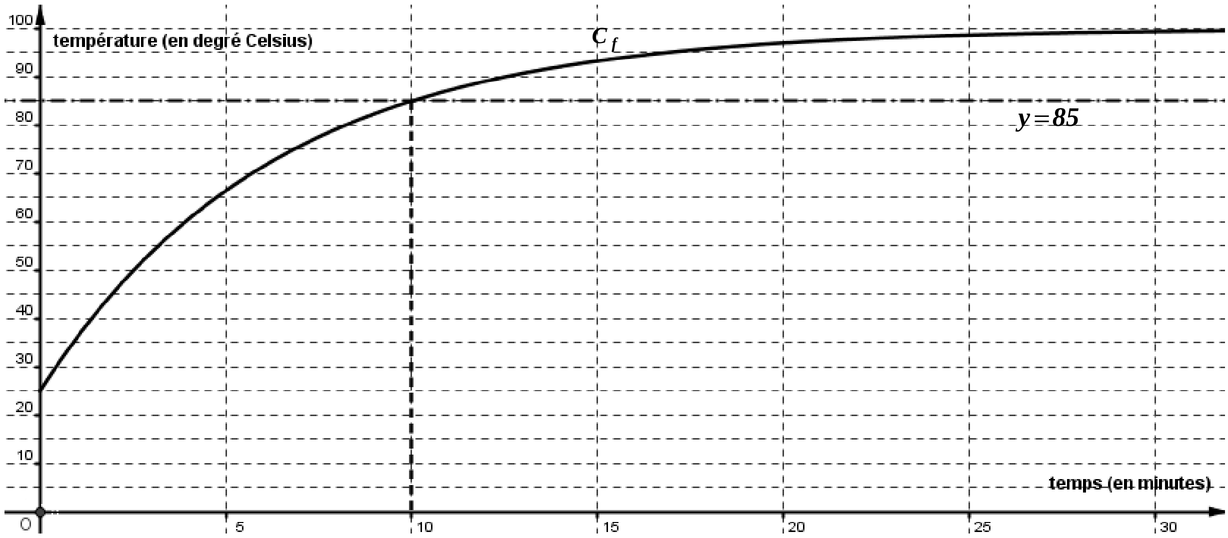
$$f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

1. **a.** Étudier le sens de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
   b. Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.

2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

On note $A(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative C_f de f.

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine $A(\theta)$ est supérieure à 80.



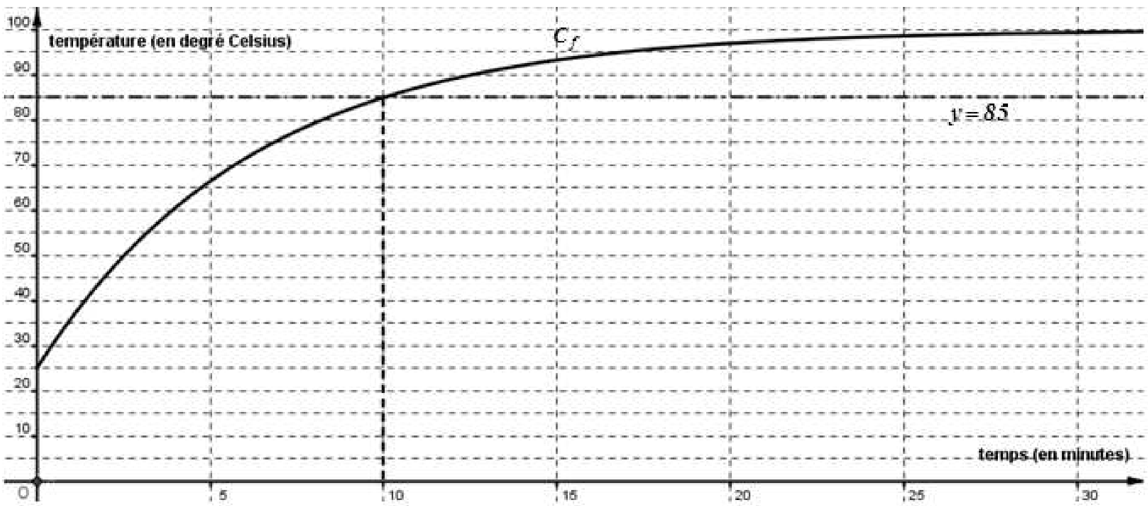
a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe page 10/10, que l'on a $A(25) > 80$.

b. Justifier que, pour $\theta \geqslant 10$, on a $A(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt$.

c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 5



EXERCICE 5

[Inde, Pondichéry 2016]

Partie A: Modélisation discrète

1. Déterminons la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes:

Déterminer la température au bout de 3 minutes revient à calculer T_3.

Or: • $T_0 = 25° C$,

• $T_1 = 0,85 \times T_0 + 15 \Rightarrow T_1 = 36,25° C$,

• $T_2 = 0,85 \times T_1 + 15 \Rightarrow T_2 = 45,8125° C$,

• $T_3 = 0,85 \times T_2 + 15 \Rightarrow T_3 = 53,94° C$.

En arrondissant à l'unité, nous pouvons affirmer que la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes sera de: 54 degrés Celsius.

2. Démontrons que, pour tout entier naturel n, $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$ ".

Initialisation: • $T_0 = 100 - 75 \times (0,85)^0 \Rightarrow T_0 \Rightarrow 25$.

Or $T_0 = 25° C$, d'après l'énoncé. Donc vrai au rang "0".

• $T_1 = 100 - 75 \times (0,85)^1 \Rightarrow T_1 = 36,25$.

Or $T_1 = 36,25$, d'après (1.). Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$

et montrons qu'alors: $T_{n+1} = 100 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}$.

Supposons: $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$$(1) \Rightarrow 0,85\, T_n = 0,85(100 - 75 \times 0,85)^n$$

$$\Rightarrow 0,85\, T_n = 85 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow 0,85\, T_n + 15 = 100 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow T_{n+1} = 100 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$T_n = 100 - 75 \times (0,85)^n.$$

3. Déterminons au bout de combien de minutes la stérilisation débutera:

D'après l'énoncé, la stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85° C.

Donc la stérilisation débutera à partir du moment où: $T_n > 85$.

$$T_n > 85 \iff 100 - 75 \times 0,85^n > 85$$

$$\iff -75 \times 0,85^n > -15$$

$$\iff 75 \times 0,85^n < 15$$

$$\iff 0,85^n < 0,2$$

$$\iff n \ln(0,85) < \ln(0,2)$$

$$\iff n > \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,85)}, \quad \text{car: } 0,85 \in]0,1[, \text{ et donc: } \ln(0,85) < 0$$

$$\Rightarrow n > 9,90.$$

Nous prendrons $n = 10$ minutes car n est un entier naturel.

En conclusion, au bout de 10 minutes la stérilisation débutera.

EXERCICE 5

[Inde, Pondichéry 2016]

Partie B: Modélisation continue

1\. a. **Étudions le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$:**

• Calculons f':

Ici: • $f(t) = 100 - 75e^{\frac{-\ln(5)}{10}t}$

• $Df = [0;+\infty[$.

Posons: $f = f_1 + f_2 \times f_3$, avec: $f_1(t) = 100$, $f_2(t) = -75$ et $f_3(t) = e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $[0;+\infty[$.

f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[0;+\infty[$.

Par conséquent, $h = f_2 \times f_3$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

Donc, f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme somme $(f_1 + h)$ de 2 fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $t \in [0;+\infty[$.

Pour tout $t \in [0;+\infty[$: $f'(t) = 75\left(\frac{\ln(5)}{10}\right)e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$

$$\Rightarrow \ f'(t) = 7,5\ln(5)e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}.$$

Au total: pour tout $t \in [0;+\infty[$, $f'(t) = 7,5\ln(5)e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$.

• **Étudions le signe de f' sur $[0;+\infty[$:**

Pour tout $t \in [0;+\infty[$: $f'(t) > 0$.

Donc pour tout $t \in [0;+\infty[$: f est strictement croissante.

• **Dressons le tableau de variation:**

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

t	0 $+\infty$
f'	$+$
f	$a \nearrow b$

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 25$,

• $b = f(+\infty) \Rightarrow b = 100$.

$$\left(\lim_{t \to +\infty} f(t) = 100 \quad \text{car: } \lim_{t \to +\infty} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} = 0\right)$$

1. b. Justifions que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$:

Supposons: $t \geqslant 10$ (1).

$$(1) \Rightarrow \frac{\ln(5) \times (10)}{10} \geqslant \ln(5)$$

$$\Rightarrow \frac{-\ln(5) \times (10)}{10} \leqslant -\ln(5)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-\ln(5) \times (10)}{10}} \leqslant e^{-\ln(5)}$$

$\Rightarrow \quad 100 - 75\,e^{\frac{-\ln(5)\times(10)}{10}} \geqslant 100 - 75 \times \left(\frac{1}{5}\right)$

$\Rightarrow \quad f(t) \geqslant 100 - 15$

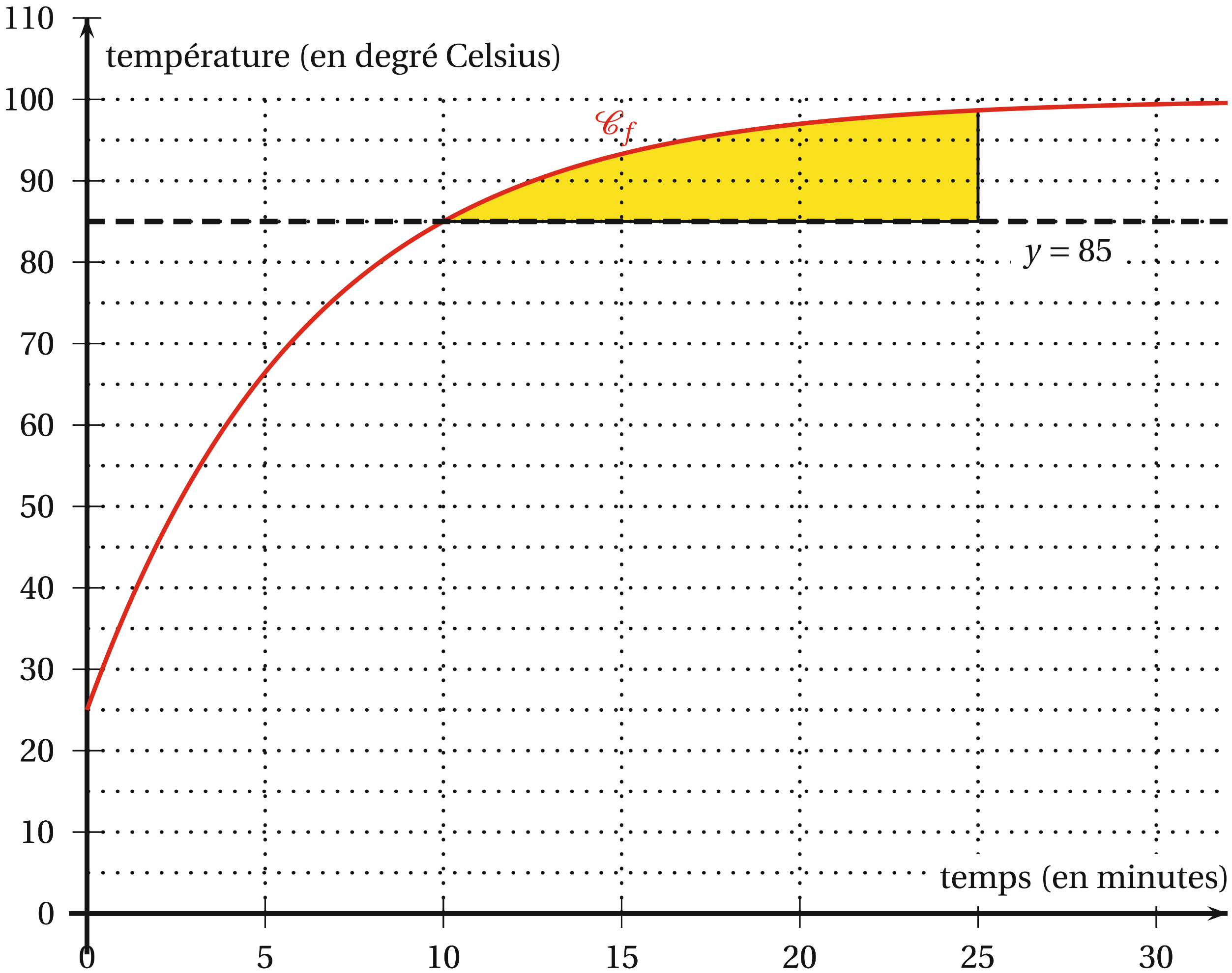
$\Rightarrow \quad f(t) \geqslant 85.$

Au total: si $t \geqslant 10$, alors $f(t) \geqslant 85$.

2. a. Justifions, à l'aide du graphique que $\mathscr{A}(25) > 80$:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathscr{A}(25)$ du domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = 25$, $y = 85$ et la courbe représentative de f, est telle que: $\mathscr{A}(25) \approx 100$.

Nous pouvons représenter cette aire $\mathscr{A}(25)$, en jaune, sur le graphique suivant:



En effet: • un rectangle correspond à 5 x 5 unités d'aire,

• dans la partie jaune, il y a 3 rectangles entiers + 2 demi-rectangles + des petits morceaux de rectangles, soit au minimum:

$3 \times (5 \times 5) + 2 \times \left(\frac{5 \times 5}{2}\right) + \varepsilon$ cad une centaine d'unités d'aire.

Au total, l'aire demandée $\mathcal{A}(25)$ est telle que: $\mathcal{A}(25) > 80$.

2. b. Montrons que $\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt$:

$\mathcal{A}(\theta) = \int_{10}^{\theta}(f(t) - 85)dt.$

La fonction " $f(t) - 85$ " est continue sur $[0;+\infty[$ donc sur $[10;\theta]$. Elle admet donc des primitives sur $[10;\theta]$ et par conséquent: $\mathcal{A}(\theta)$ existe.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\theta) &= \int_{10}^{\theta}(f(t) - 85)dt \\
&= \int_{10}^{\theta}\left(100 - 75e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} - 85\right)dt \\
&= \int_{10}^{\theta}\left(15 - 75e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\right)dt \\
&= \int_{10}^{\theta} 15\,dt - 75\int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt \\
&= [15t]_{10}^{\theta} - 75\int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt.$$

Au total: l'égalité est bien vérifiée.

2. c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

La stérilisation est finie au bout de 20 minutes ssi: $\mathcal{A}(20) > 80$.

$$\mathcal{A}(20) > 80 \iff 15(20-10) - 75\int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt > 80$$

$$\iff -75\int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt > -70$$

$$\iff \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt < \frac{7}{7,5}.$$

Posons: $I = \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt.$

Ainsi: $$I = \left[\frac{-10}{\ln(5)}\, e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\right]_{10}^{20}$$

$$= \frac{-10}{\ln(5)}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right]$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{8}{5 \times \ln(5)} > \frac{7}{7,5}.$$

Au total, au bout de 20 minutes, la stérilisation n'est pas finie car: $I > \frac{7}{7,5}$.