

EXERCICE 5

[Inde, Pondichéry 2016]

Partie A: Modélisation discrète

1. Déterminons la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes:

Déterminer la température au bout de 3 minutes revient à calculer T_3 .

Or: • $T_0 = 25^\circ \text{C}$,

• $T_1 = 0,85 \times T_0 + 15 \Rightarrow T_1 = 36,25^\circ \text{C}$,

• $T_2 = 0,85 \times T_1 + 15 \Rightarrow T_2 = 45,8125^\circ \text{C}$,

• $T_3 = 0,85 \times T_2 + 15 \Rightarrow T_3 = 53,94^\circ \text{C}$.

En arrondissant à l'unité, nous pouvons affirmer que la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes sera de: 54 degrés Celsius.

2. Démontrons que, pour tout entier naturel n , $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$ ".

Initialisation: • $T_0 = 100 - 75 \times (0,85)^0 \Rightarrow T_0 \Rightarrow 25$.

Or $T_0 = 25^\circ \text{C}$, d'après l'énoncé. Donc vrai au rang "0".

• $T_1 = 100 - 75 \times (0,85)^1 \Rightarrow T_1 = 36,25$.

Or $T_1 = 36,25$, d'après (1). Donc vrai au rang "1".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$

et montrons qu'alors: $T_{n+1} = 100 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}$.

Supposons: $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow 0,85 T_n = 0,85(100 - 75 \times 0,85)^n$$

$$\Rightarrow 0,85 T_n = 85 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow 0,85 T_n + 15 = 100 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow T_{n+1} = 100 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , nous avons:

$$T_n = 100 - 75 \times (0,85)^n.$$

3. Déterminons au bout de combien de minutes la stérilisation débutera:

D'après l'énoncé, la stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C .

Donc la stérilisation débutera à partir du moment où: $T_n > 85$.

$$T_n > 85 \Leftrightarrow 100 - 75 \times 0,85^n > 85$$

$$\Leftrightarrow -75 \times 0,85^n > -15$$

$$\Leftrightarrow 75 \times 0,85^n < 15$$

$$\Leftrightarrow 0,85^n < 0,2$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,85) < \ln(0,2)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,85)}, \text{ car: } 0,85 \in]0,1[, \text{ et donc: } \ln(0,85) < 0$$

$$\Rightarrow n > 9,90.$$

Nous prendrons $n = 10$ minutes car n est un entier naturel.

En conclusion, au bout de 10 minutes la stérilisation débutera.

EXERCICE 5

[Inde, Pondichéry 2016]

Partie B: Modélisation continue

1. a. Étudions le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$:

• Calculons f' :

Ici: • $f(t) = 100 - 75e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$

• $Df = [0; +\infty[$.

Posons: $f = f_1 + f_2 \times f_3$, avec: $f_1(t) = 100$, $f_2(t) = -75$ et $f_3(t) = e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $[0; +\infty[$.

f_3 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[0; +\infty[$.

Par conséquent, $h = f_2 \times f_3$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$.

Donc, f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme ($f_1 + h$) de 2 fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $t \in [0; +\infty[$.

Pour tout $t \in [0; +\infty[$: $f'(t) = 75 \left(\frac{\ln(5)}{10} \right) e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$

$$\Rightarrow f'(t) = 7,5 \ln(5) e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}.$$

Au total: pour tout $t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = 7,5 \ln(5) e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$.

• Étudions le signe de f' sur $[0; +\infty[$:

Pour tout $t \in [0; +\infty[$: $f'(t) > 0$.

Donc pour tout $t \in [0; +\infty[$: f est strictement croissante.

• Dressons le tableau de variation:

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

t	0	$+\infty$
f'	+	
f		

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 25$,

• $b = f(+\infty) \Rightarrow b = 100$.

$$\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 100 \text{ car: } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} = 0 \right)$$

1. b. Justifions que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$:

Supposons: $t \geq 10$ (1).

$$(1) \Rightarrow \frac{\ln(5) \times (10)}{10} \geq \ln(5)$$

$$\Rightarrow \frac{-\ln(5) \times (10)}{10} \leq -\ln(5)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-\ln(5) \times (10)}{10}} \leq e^{-\ln(5)}$$

$$\Rightarrow 100 - 75e^{\frac{-\ln(5) \times (10)}{10}} \geq 100 - 75 \times \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) \geq 100 - 15$$

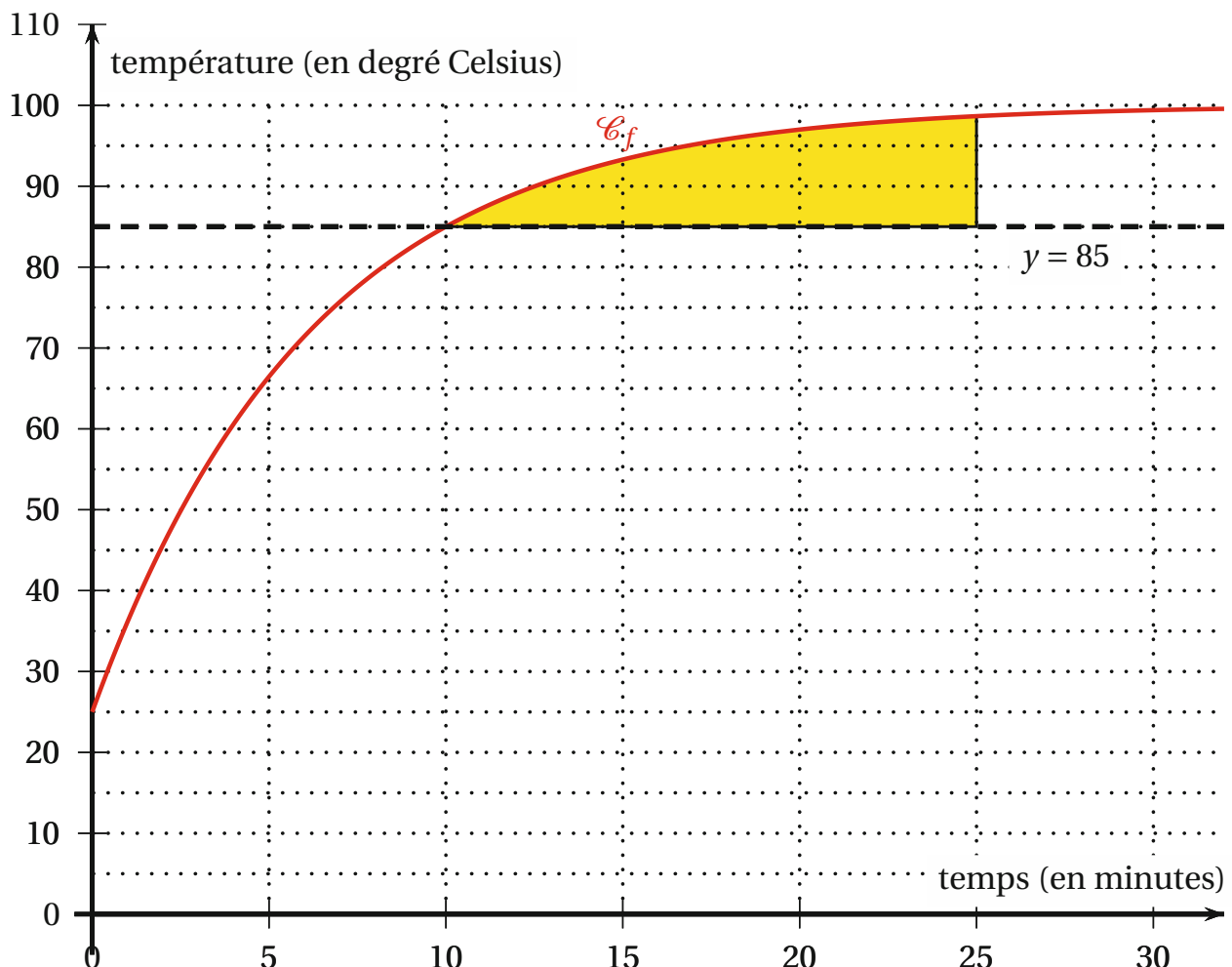
$$\Rightarrow f(t) \geq 85.$$

Au total: si $t \geq 10$, alors $f(t) \geq 85$.

2. a. Justifions, à l'aide du graphique que $\mathcal{A}(25) > 80$:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathcal{A}(25)$ du domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = 25$, $y = 85$ et la courbe représentative de f , est telle que: $\mathcal{A}(25) \approx 100$.

Nous pouvons représenter cette aire $\mathcal{A}(25)$, en jaune, sur le graphique suivant:



- En effet:
- un rectangle correspond à 5×5 unités d'aire,
 - dans la partie jaune, il y a 3 rectangles entiers + 2 demi-rectangles + des petits morceaux de rectangles, soit au minimum:

$$3 \times (5 \times 5) + 2 \times \left(\frac{5 \times 5}{2} \right) + \varepsilon \text{ cad une certaine d'unités d'aire.}$$

Au total, l'aire demandée $\mathcal{A}(25)$ est telle que: $\mathcal{A}(25) > 80$.

2. b. Montrons que $\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt$:

$$\mathcal{A}(\theta) = \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85) dt.$$

La fonction " $f(t) - 85$ " est continue sur $[0; +\infty[$ donc sur $[10; \theta]$. Elle admet donc des primitives sur $[10; \theta]$ et par conséquent: $\mathcal{A}(\theta)$ existe.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\theta) &= \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85) dt \\ &= \int_{10}^{\theta} (100 - 75e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} - 85) dt \\ &= \int_{10}^{\theta} (15 - 75e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}) dt \\ &= \int_{10}^{\theta} 15 dt - 75 \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt \\ &= [15t]_{10}^{\theta} - 75 \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt \\ &\Rightarrow \mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt. \end{aligned}$$

Au total: l'égalité est bien vérifiée.

2. c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

La stérilisation est finie au bout de 20 minutes ssi: $\mathcal{A}(20) > 80$.

$$\mathcal{A}(20) > 80 \Leftrightarrow 15(20 - 10) - 75 \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt > 80$$

$$\Leftrightarrow -75 \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt > -70$$

$$\Leftrightarrow \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt < \frac{7}{7,5}$$

Posons: $I = \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt$.

Ainsi: $I = \left[\frac{-10}{\ln(5)} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} \right]_{10}^{20}$

$$= \frac{-10}{\ln(5)} \left[\left(\frac{1}{5} \right)^2 - \frac{1}{5} \right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{8}{5 \times \ln(5)} > \frac{7}{7,5}$$

Au total, au bout de 20 minutes, la stérilisation n'est pas finie car: $I > \frac{7}{7,5}$.