Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,

conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 10 pages numérotées de 1/10 à 10/10.

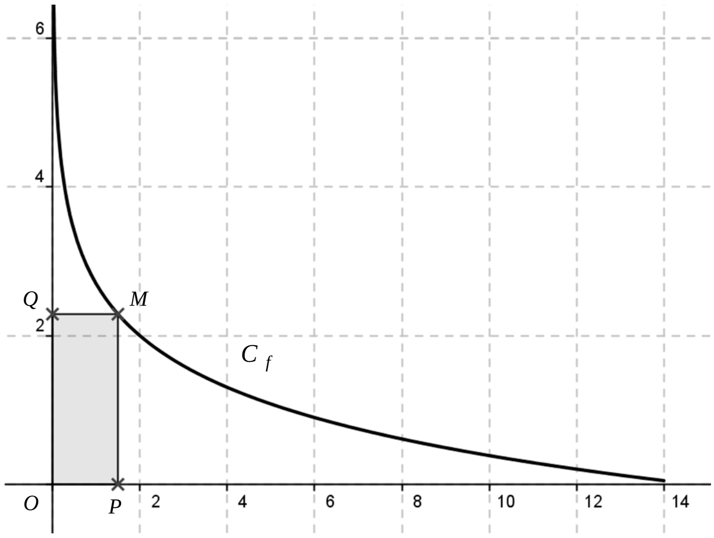
Le sujet comporte une feuille d'annexe à la page 10/10 à remettre avec la copie.

EXERCICE 4 (3 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $]0;14]$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative C_f de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à C_f, on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle $OPMQ$ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur C_f ?
- L'aire du rectangle $OPMQ$ peut-elle être maximale ?
  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.

EXERCICE 4

[Inde, Pondichéry 2016]

1. L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur Cf ?

Non.

Justifions le.

L'aire $\mathscr{A}$ du rectangle OPMQ est:

Longueur x Largeur $= f(x) \times x$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{A}(x) = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Comme l'aire $\mathscr{A}$ est fonction de x, elle ne peut pas être constante car $x \in]0;14]$.

2. L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?

Oui.

Justifions le.

Nous devons calculer la valeur de " x " telle que: $\mathscr{A}'(x) = 0$.

Ici:
- $\mathscr{A}(x) = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$
- $D_{\mathscr{A}} =]0;14]$.

Posons: $\mathscr{A} = f_1 + f_2 \times f_3$, avec: $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = -x$ et $f_3(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $]0;14]$.

f_3 est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur $]0;14]$.

Par conséquent, $f_2 \times f_3$ est dérivable sur $]0;14]$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $]0;14]$.

Enfin, $\mathcal{A}$ est dérivable sur $]0;14]$ comme somme $(f_1 + f_2 \times f_3)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0;14]$.

Ainsi, nous pouvons calculer $\mathcal{A}'$ pour tout $x \in]0;14]$.

Pour tout $x \in]0;14]$: $\mathcal{A}'(x) = 2 - \left(1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \mathcal{A}'(x) = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

Dans ces conditions: $\mathcal{A}'(x) = 0$ ssi: $x = 2e$.

Notons que:
- $\mathcal{A}$ est croissante sur $]0;2e]$
- $\mathcal{A}$ est décroissante sur $[2e;14]$
- $\mathcal{A}$ est maximale quand $x = 2e$.

En conclusion: le point $M(2e;f(2e))$ cad $M(2e;1)$ est tel que l'aire du rectangle OPMQ est maximale.

Cette aire maximale est égale à: $\mathcal{A}_{max} = 2 \times (2e) - (2e) \ln\left(\frac{2e}{2}\right)$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{max} = 2e$.