EXERCICE 3

[Inde, Pondichéry 2016]

Partie A:

1. Justifions que N est l'inverse de M:

D'après le cours, N est l'inverse de M ssi: $M \cdot N = N \cdot M = I_2$.

Or ici: • $M \cdot N = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{3}{3a-5b} & \dfrac{-b}{3a-5b} \\ \dfrac{-5}{3a-5b} & \dfrac{a}{3a-5b} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{3a-5b}{3a-5b} & \dfrac{-ab+ba}{3a-5b} \\ \dfrac{15-15}{3a-5b} & \dfrac{-5b+3a}{3a-5b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M \cdot N = I_2.$$

• $N \cdot M = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{3a-5b} & \dfrac{-b}{3a-5b} \\ \dfrac{-5}{3a-5b} & \dfrac{a}{3a-5b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{3a-5b}{3a-5b} & \dfrac{3b-3b}{3a-5b} \\ \dfrac{-5a+5a}{3a-5b} & \dfrac{-5b+3a}{3a-5b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow N \cdot M = I_2.$$

Au total: $M \cdot N = N \cdot M = I_2$ et par conséquent nous pouvons affirmer que N est l'inverse de M.

2. a. Vérifions que le couple $(6; 3)$ est une solution de (E):

L'équation (E) s'écrit: $3a - 5b = 3$.

Or ici: $a = 6$ et $b = 3$.

D'où: $3 \times 6 - 5 \times 3 = 3$.

Ainsi: le couple $(6; 3)$ est bien une solution de (E).

2. b. b1. Montrons que le couple d'entiers $(a; b)$ est solution de (E) si et seulement si $3(a - 6) = 5(b - 3)$:

• Supposons que le couple $(a; b)$ soit solution de (E).

Dans ces conditions: $3a - 5b = 3 \quad (1)$.

Le couple $(6; 3)$ est une solution de (E).

D'où: $3 \times 6 - 5 \times 3 = 3 \quad (2)$.

$(1) - (2) \iff (3a - 5b) - (3 \times 6 - 5 \times 3) = 3 - 3$

$\iff 3(a - 6) - 5(b - 3) = 0$

$\Rightarrow 3(a - 6) = 5(b - 3)$.

• Inversement, si le couple $(a; b)$ vérifie $3(a - 6) = 5(b - 3)$ alors:

$3a - 18 = 5b - 15 \iff 3a - 5b = 3$, ce qui signifie que le couple $(a; b)$ est solution de (E).

Au total: le couple $(a ; b)$ est solution de (E) ssi: $3(a-6) = 5(b-3)$.

2. b. b2. Déduisons-en l'ensemble des solutions de l'équation (E):

• Si $3(a-6) = 5(b-3)$, alors 3 divise $5(b-3)$.

Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, d'après **le théorème de GAUSS**, 3 divise $(b-3)$.

Nous pouvons alors écrire: $b - 3 = 3 \times k$, $k \in \mathbb{Z}$.

D'où: $3(a-6) = 5(b-3) \iff 3(a-6) = 5 \times (3 \times k)$

$\iff a - 6 = 5 \times k$

$\iff a = 6 + 5 \times k$ et $b - 3 = 3 \times k$.

Ainsi: $a = 6 + 5 \times k$ et par conséquent $b = 3 + 3 \times k$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc:

$$\{(6 + 5 \cdot k ;\ 3 + 3 \cdot k),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

• Inversement, si $a = 6 + 5 \cdot k$ et $b = 3 + 3 \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$:

$3a - 5b = 3(6 + 5 \cdot k) - 5(3 + 3 \cdot k) \iff 3a - 5b = 3$.

Et donc, le couple $(a ; b)$ est solution de l'équation (E).

Au total: l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$\{(6 + 5 \cdot k ;\ 3 + 3 \cdot k),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Partie B:

1. Déterminons la matrice inverse de Q:

Ici: $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, la matrice inverse de Q est:

$$Q^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{5}{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Au total: $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{5}{3} & 2 \end{pmatrix}.$

2. Codons le mot DO:

En respectant les 4 étapes, nous obtenons:

le mot DO est codé en le mot IF.

3. a. a1. Montrons que $3\,X = 3\,Q^{-1}\,Y$:

D'après l'énoncé: $Y = Q\,X$.

D'où: $Y = Q\,X \iff 3\,Y = 3\,Q\,X$

$\iff 3\,Q^{-1}\,Y = 3\,Q^{-1}\,Q\,X$

$\iff 3\,Q^{-1}\,Y = 3\,I_2\,X$

$\iff 3\,X = 3\,Q^{-1}\,Y.$

Ainsi, nous avons bien: $3\,X = 3\,Q^{-1}\,Y$.

3. a. a2. Montrons que $\begin{cases} 3x_1 = 3r_1 - 3r_2\ [26] \\ 3x_2 = -5r_1 + 6r_2\ [26] \end{cases}$:

Nous venons de montrer que: $3\,X = 3\,Q^{-1}\,Y$.

D'où: $3\,X = 3\,Q^{-1}\,Y \iff 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{5}{3} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} 3x_1 = 3y_1 - 3y_2 \\ 3x_2 = -5y_1 + 6y_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 3r_1 - 3r_2 \ [26] \\ 3x_2 = -5r_1 + 6r_2 \ [26] \end{cases},$$

car: $y_1 = r_1 \ [26]$ et $y_2 = r_2 \ [26]$.

Nous venons donc de montrer que: $\begin{cases} 3x_1 = 3r_1 - 3r_2 \ [26] \\ 3x_2 = -5r_1 + 6r_2 \ [26] \end{cases}$.

3. b. Montrons que $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \ [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \ [26] \end{cases}$:

Nous savons que:
- $\begin{cases} 3x_1 = 3r_1 - 3r_2 \ [26] \\ 3x_2 = -5r_1 + 6r_2 \ [26] \end{cases}$ (a),
- $9 \times 3 = 1 \ [26]$.

D'où: (a) $\Longleftrightarrow \begin{cases} 9 \times (3x_1) = 9 \times (3r_1) - 9 \times (3r_2) \ [26] \\ 9 \times (3x_2) = 9 \times (-5r_1) + 9 \times (6r_2) \ [26] \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \ [26] \\ x_2 \equiv -45r_1 + 54r_2 \ [26] \end{cases} \quad (b).$$

Or: $-45 = 7 \ [26]$ et $54 = 2 \ [26]$.

D'où: (b) $\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \ [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \ [26] \end{cases}$.

Au total: $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \ [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \ [26] \end{cases}$.

3. c. Décodons le mot SG:

Le mot SG a pour valeurs r_1 et r_2 : $r_1 = 18$ et $r_2 = 6$.

Dans ces conditions:

$$\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \, [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \, [26] \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \equiv 12 \, [26] \\ x_2 \equiv 138 \, [26] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \equiv 12 \, [26] \\ x_2 \equiv 8 \, [26] \end{cases}.$$

Ainsi, en décodant le mot SG, nous obtenons: le mot MI.