Corrigé

Exercice 3

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,

conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 10 pages numérotées de 1/10 à 10/10.

Le sujet comporte une feuille d'annexe à la page 10/10 à remettre avec la copie.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers.

Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M. On le note det(M).
Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

1. Dans cette question on suppose que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \dfrac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$.

Justifier que N est l'inverse de M.

2. On considère l'équation (E) : $\det(M) = 3$.
On souhaite déterminer tous les couples d'entiers (a ; b) solutions de l'équation (E).

a. Vérifier que le couple (6 ; 3) est une solution de (E).
b. Montrer que le couple d'entiers (a ; b) est solution de (E) si et seulement si $3(a-6) = 5(b-3)$.
c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Partie B

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de Q.

2. *Codage avec la matrice Q*

Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ on utilise la procédure ci-après :

Étape 1 : On associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Étape 2 : La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $Y = QX$.

Étape 3 : La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

Étape 4 : À la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1.

$$\text{Exemple : JE} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{OF}$$

Le mot JE est codé en le mot OF.

Coder le mot DO.

3. *Procédure de décodage*
On conserve les mêmes notations que pour le codage.
Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que $Y = QX$.

a) Démontrer que $3X = 3Q^{-1}Y$ puis que $\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{cases}$.

b) En remarquant que $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$, montrer que $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{cases}$.

c) Décoder le mot SG.

EXERCICE 3

[Inde, Pondichéry 2016]

Partie A:

1. Justifions que N est l'inverse de M:

D'après le cours, N est l'inverse de M ssi: $M \cdot N = N \cdot M = I_2$.

Or ici: • $M \cdot N = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{3a-5b} & \frac{-b}{3a-5b} \\ \frac{-5}{3a-5b} & \frac{a}{3a-5b} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3a-5b}{3a-5b} & \frac{-ab+ba}{3a-5b} \\ \frac{15-15}{3a-5b} & \frac{-5b+3a}{3a-5b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M \cdot N = I_2.$$

• $N \cdot M = \begin{pmatrix} \frac{3}{3a-5b} & \frac{-b}{3a-5b} \\ \frac{-5}{3a-5b} & \frac{a}{3a-5b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3a-5b}{3a-5b} & \frac{3b-3b}{3a-5b} \\ \frac{-5a+5a}{3a-5b} & \frac{-5b+3a}{3a-5b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow N \cdot M = I_2.$$

Au total: $M \cdot N = N \cdot M = I_2$ et par conséquent nous pouvons affirmer que N est l'inverse de M.

2. a. Vérifions que le couple (6 ; 3) est une solution de (E):

L'équation (E) s'écrit: $3a - 5b = 3$.

Or ici: $a = 6$ et $b = 3$.

D'où: $3 \times 6 - 5 \times 3 = 3$.

Ainsi: le couple (6 ; 3) est bien une solution de (E).

2. b. b1. Montrons que le couple d'entiers (a ; b) est solution de (E) si et seulement si $3\,(a - 6) = 5\,(b - 3)$:

- Supposons que le couple (a ; b) soit solution de (E).

Dans ces conditions: $3a - 5b = 3$ (1).

Le couple (6 ; 3) est une solution de (E).

D'où: $3 \times 6 - 5 \times 3 = 3$ (2).

$$(1) - (2) \iff (3a - 5b) - (3 \times 6 - 5 \times 3) = 3 - 3$$
$$\iff 3\,(a - 6) - 5\,(b - 3) = 0$$
$$\Rightarrow 3\,(a - 6) = 5\,(b - 3).$$

- Inversement, si le couple (a ; b) vérifie $3\,(a - 6) = 5\,(b - 3)$ alors:

$3a - 18 = 5b - 15 \iff 3a - 5b = 3$, ce qui signifie que le couple (a ; b) est solution de (E).

Au total: le couple $(a\,;b)$ est solution de (E) ssi: $3\,(a-6) = 5\,(b-3)$.

2. b. b2. Déduisons-en l'ensemble des solutions de l'équation (E):

• Si $3\,(a-6) = 5\,(b-3)$, alors 3 divise $5\,(b-3)$.

Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, d'après **le théorème de GAUSS**, 3 divise $(b-3)$.

Nous pouvons alors écrire: $b - 3 = 3 \times k,\ k \in \mathbb{Z}$.

D'où: $3\,(a-6) = 5\,(b-3) \iff 3\,(a-6) = 5 \times (3 \times k)$

$\iff a - 6 = 5 \times k$

$\iff a = 6 + 5 \times k$ et $b - 3 = 3 \times k$.

Ainsi: $a = 6 + 5 \times k$ et par conséquent $b = 3 + 3 \times k,\ k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc:

$$\{(6 + 5\cdot k\,;\ 3 + 3\cdot k),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

• Inversement, si $a = 6 + 5\cdot k$ et $b = 3 + 3\cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$:

$3a - 5b = 3\,(6 + 5\cdot k) - 5\,(3 + 3\cdot k) \iff 3a - 5b = 3$.

Et donc, le couple $(a\,;b)$ est solution de l'équation (E).

Au total: l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$\{(6 + 5\cdot k\,;\ 3 + 3\cdot k),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Partie B:

1. Déterminons la matrice inverse de Q:

Ici: $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, la matrice inverse de Q est:

$$Q^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \implies Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{5}{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Au total: $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{5}{3} & 2 \end{pmatrix}.$

2. Codons le mot DO:

En respectant les 4 étapes, nous obtenons:

le mot DO est codé en le mot IF.

3. a. a1. Montrons que $3\,X = 3\,Q^{-1}\,Y$:

D'après l'énoncé: $Y = Q\,X$.

D'où: $Y = Q\,X \iff 3\,Y = 3\,Q\,X$

$\iff 3\,Q^{-1}\,Y = 3\,Q^{-1}\,Q\,X$

$\iff 3\,Q^{-1}\,Y = 3\,I_2\,X$

$\iff 3\,X = 3\,Q^{-1}\,Y.$

Ainsi, nous avons bien: $3\,X = 3\,Q^{-1}\,Y.$

3. a. a2. Montrons que $\begin{cases} 3x_1 = 3r_1 - 3r_2 \; [26] \\ 3x_2 = -5r_1 + 6r_2 \; [26] \end{cases}$:

Nous venons de montrer que: $3\,X = 3\,Q^{-1}\,Y.$

D'où: $3\,X = 3\,Q^{-1}\,Y \iff 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{5}{3} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} 3x_1 = 3y_1 - 3y_2 \\ 3x_2 = -5y_1 + 6y_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x_1 = 3r_1 - 3r_2 \ [26] \\ 3x_2 = -5r_1 + 6r_2 \ [26] \end{cases},$$

car: $y_1 = r_1 \ [26]$ et $y_2 = r_2 \ [26]$.

Nous venons donc de montrer que: $\begin{cases} 3x_1 = 3r_1 - 3r_2 \ [26] \\ 3x_2 = -5r_1 + 6r_2 \ [26] \end{cases}$.

3. b. Montrons que $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \ [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \ [26] \end{cases}$:

Nous savons que:

- $\begin{cases} 3x_1 = 3r_1 - 3r_2 \ [26] \\ 3x_2 = -5r_1 + 6r_2 \ [26] \end{cases}$ (a),
- $9 \times 3 = 1 \ [26]$.

D'où: (a) $\iff \begin{cases} 9 \times (3x_1) = 9 \times (3r_1) - 9 \times (3r_2) \ [26] \\ 9 \times (3x_2) = 9 \times (-5r_1) + 9 \times (6r_2) \ [26] \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \ [26] \\ x_2 \equiv -45r_1 + 54r_2 \ [26] \end{cases} \quad (b).$$

Or: $-45 = 7 \ [26]$ et $54 = 2 \ [26]$.

D'où: (b) $\iff \begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \ [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \ [26] \end{cases}$.

Au total: $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \ [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \ [26] \end{cases}$.

3. c. Décodons le mot SG:

Le mot SG a pour valeurs r_1 et r_2: $r_1 = 18$ et $r_2 = 6$.

Dans ces conditions:

$$\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \, [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \, [26] \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \equiv 12 \, [26] \\ x_2 \equiv 138 \, [26] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \equiv 12 \, [26] \\ x_2 \equiv 8 \, [26] \end{cases}.$$

Ainsi, en décodant le mot SG, nous obtenons: le mot MI.