EXERCICE 2 (Inde, Pondichery 2016)

① Calculons BJ et déduisons-en BK :

D'après l'énoncé : • $B(z_B)$ avec $z_B = -1$,

• $J(z_J)$ avec $z_J = \frac{1}{2} i$.

Etape 1 :

L'équation d'un cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Ici : le centre est $J(0, 1/2)$ et le rayon est $R = 1/2$.

D'où : $\mathscr{C}$ est un cercle d'équation : $x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Etape 2 :

$B(-1,0)$ et $J(0, 1/2)$.

Or : l'équation du segment [BJ] est de la forme : $y = ax + b$. (1)

Comme B et J appartiennent au segment [BJ], nous avons le système suivant :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -a + b \\ 1/2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/2 \end{cases}.$$

D'où : le segment [BJ] a pour équation : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Etape 3 : Calcul de BJ.

$BJ = |z_J - z_B| \Leftrightarrow BJ = \left|\frac{1}{2} i + 1\right| \Rightarrow BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Au total : $BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Etape 4 : Calcul de BK.

Le point K vérifie le système :

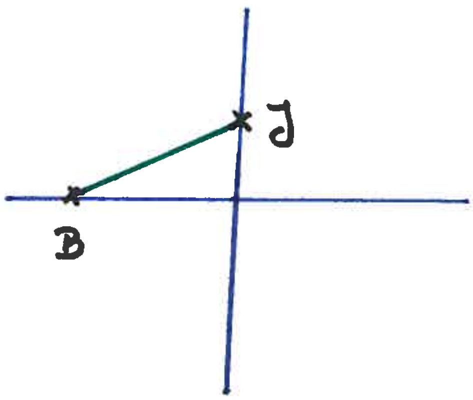
$$\begin{cases} x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (\frac{1}{2}x)^2 = \frac{1}{4} \\ y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \text{ ou } y = \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où 2 solutions : $U_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right)$ et $U_2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right)$.

Nous retiendrons la solution U_1 car graphiquement nous voyons que le point K a une abscisse et une ordonnée forcément négatifs.



Au total : • $K(z_K)$ avec : $z_K = -\frac{\sqrt{5}}{5} + i\left(-\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right)$,

• $BK = |z_K - z_B| \Rightarrow BK = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

② ⓐ Donnons la forme exponentielle de l'affixe z_2 de A_2 :

ⓐ . Le module de z_2 est : $|z_2| = 1$.

En effet, d'après l'énoncé : . $\vec{OA_0} = \vec{u}$

. les 5 côtés ont la même longueur.

Donc : $\vec{OA_2} = \vec{u}$, avec $|\vec{u}| = 1$.

ⓑ . L'argument de z_2 est : $\theta = \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{5}\ [2\pi]$.

Sous forme exponentielle z_2 s'écrit : $z_2 = 1 . e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

ⓑ Démontrons que $BA_2^2 = 2 + 2\cos(4\pi/5)$:

$$BA_2^2 = |z_2 - z_B|^2 \Leftrightarrow BA_2^2 = \left(\left(\cos(4\pi/5) + 1\right)^2 + \left(\sin(4\pi/5)\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow BA_2^2 = \cos^2(4\pi/5) + \sin^2(4\pi/5) + 1 + 2\cos(4\pi/5)$$

$$\Rightarrow BA_2^2 = 2 + 2\cos(4\pi/5).$$

Au total : $BA_2^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

ⓒ Déduisons-en que $BA_2 = BK$:

D'après le logiciel : . $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5} - 1\right)$,

. $\left(\frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

Or : $BA_2 = \left(2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^{1/2} \Leftrightarrow BA_2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{1/2}$

$$\Leftrightarrow BA_2 = \left(\frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow BA_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Au total : $BA_2 = BK = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

③ Construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier :

Nous obtenons le graphique suivant :