EXERCICE 1

[Inde, Pondichéry 2016]

Partie A: Connexion à internet

1. a. Hachurons le graphique donné:

D'après l'énoncé: $P(T \geqslant 22) = 0,023$.

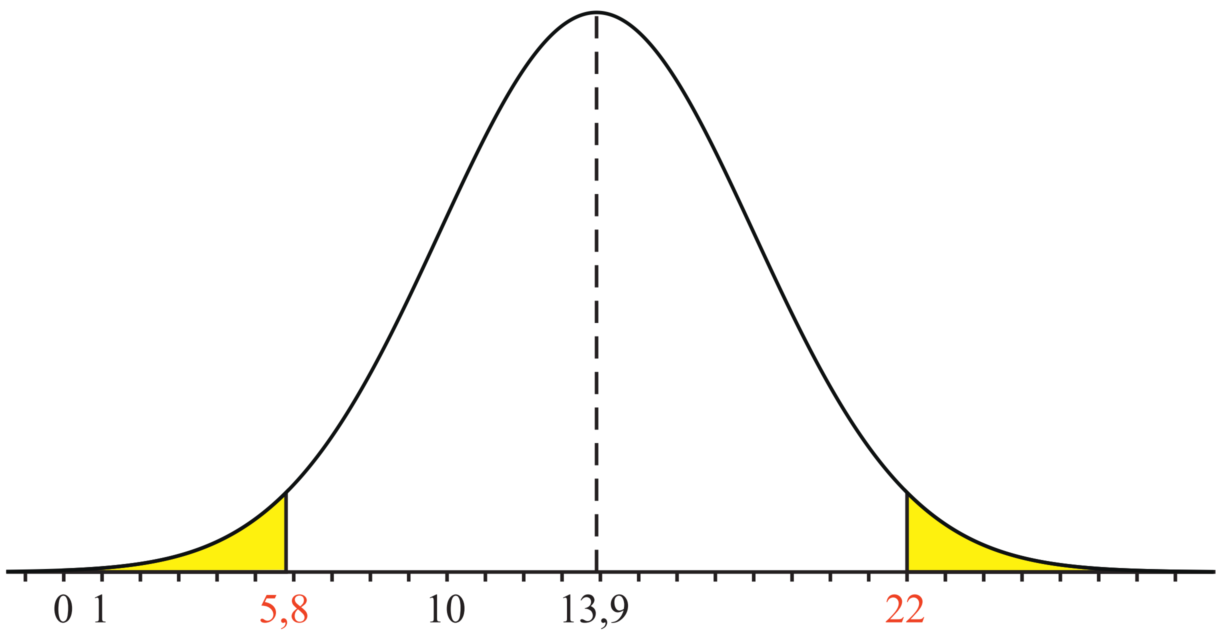
D'où la partie droite du graphique hachurée en jaune.

Or: $\mu = 13,9$.

Et: $22 - 13,9 = 8,1$ et $13,9 - 8,1 = 5,8$.

D'où la partie gauche du graphique hachurée en jaune.

Graphique donné en annexe page 9/10:



1. b. b1. Déterminons $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22)$ en justifiant:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T est la variable aléatoire qui correspond au temps hebdomadaire de connexion à internet (en heures).
- T suit la loi normale d'espérance $\mu = 13,9$ et d'écart type $\sigma = ?$
- T' suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22)$.

$$P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) = P(T \leqslant 22) - P(T \leqslant 5,8)$$

$$= (1 - P(T \geqslant 22)) - P(T \leqslant 5,8)$$

$$= 1 - 2 \times P(T \leqslant 5,8)$$

car $P(T \geqslant 22) = P(T \leqslant 5,8)$

$$\Rightarrow P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) \approx 0,954.$$

Au total, la probabilité demandée est: 0, 954 soit 95, 4%.

1. b. b2. Montrons que $\sigma \approx 4,1$:

Nous savons que: $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

Ici, nous avons: $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) \approx 0,954$.

Par identification, nous avons:

$$\begin{cases} \mu - 2\sigma = 5,8 \\ \mu + 2\sigma = 22 \end{cases} \Rightarrow \sigma = 4,05.$$

Au total, la valeur recherchée de σ au dixième est: $\sigma = 4,1$.

2. Déterminons la probabilité que le jeune soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine:

Il s'agit de calculer: $P\,(T \geqslant 18)$.

$$P\,(T \geqslant 18) = P\left(\frac{T - \mu}{\sigma} \geqslant \frac{18 - 13,9}{4,1}\right)$$

$$= P\,(T' \geqslant 1)$$

$$= 1 - P\,(T' \leqslant 1).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $P\,(T \geqslant 18) \approx 16\%$.

Au total, la probabilité que le jeune soit connecté plus de 18 heures par semaine est d'environ: 16%.

EXERCICE 1

[Inde, Pondichéry 2016]

Partie B: La loi Hadopi

1. a. Reproduisons et complétons l'arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- R = " le résultat du lancer est pair ".
- O = " le jeune a répondu Oui ".
- $\overline{R}$ = " le résultat du lancer est impair ".
- $\overline{O}$ = " le jeune a répondu Non ".

- $P(R) = 3/6$
- $P(\overline{R}) = 3/6$

$(3/6 + 3/6 = 1)$.

- $P_R(O) = p$
- $P_R(\overline{O}) = 1 - p$

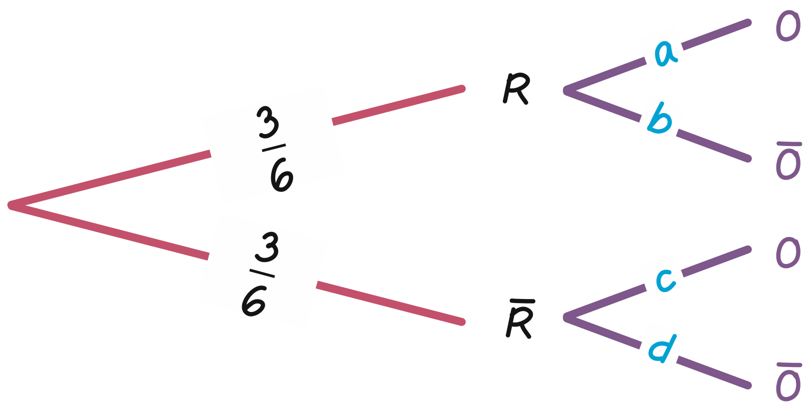
$(p + (1 - p) = 1)$.

- $P_{\overline{R}}(O) = 1/3$
- $P_{\overline{R}}(\overline{O}) = 2/3$

$(1/3 + 2/3 = 1)$.

Nous pouvons reproduire toutes ces données sur un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:
- $a = p$
- $b = 1 - p$
- $c = 1/3$
- $d = 2/3$

1. b. Déduisons-en que la probabilité q de l'événement = " le jeune a répondu Oui " est $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$:

Cela revient à calculer: $P(O)$.

Or, l'événement $O = (O \cap R) \cup (O \cap \overline{R})$.

D'où: $P(O) = P(O \cap R) + P(O \cap \overline{R})$

$= P_R(O) \times P(R) + P_{\overline{R}}(O) \times P(\overline{R})$.

Ainsi: $P(O) = p \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6}$ <=> $P(O) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$

=> $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$.

Au total, la probabilité demandée est bien: $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$.

2. a. Donnons un intervalle de confiance à 95% de la proportion q de jeunes qui répondent " Oui " au sondage:

Ici, nous avons: • $n = 1500$

• $f = \frac{625}{1500}$ => $f = \frac{5}{12}$.

Dans ces conditions:

$n = 1500 \geq 30$, $n.f = 625 \geq 5$ et $n.(1 - f) = 875 \geq 5$.

Les conditions étant réunies, un intervalle de confiance à 95% de la proportion q de jeunes qui répondent " Oui " à un tel sondage s'écrit:

$$I = [f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}], \quad \text{cad:} \quad I = [\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; \frac{5}{12} + \frac{1}{\sqrt{n}}].$$

À l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [0.390 ; 0.443]$.

2. b. Que pouvons-nous dire sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

Nous savons que: • $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$

• $I \approx [0.390 ; 0.443]$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire:

$q \in I$ ssi: $0.390 \leq q \leq 0.443$

$\iff 0.390 \leq \frac{1}{2}p + \frac{1}{6} \leq 0.443$

$\iff 0.447 \leq p \leq 0.553$.

Au total, nous pouvons dire que la proportion de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet est comprise entre: 44.7% et 55.3%.