Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,

conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 10 pages numérotées de 1/10 à 10/10.

Le sujet comporte une feuille d'annexe à la page 10/10 à remettre avec la copie.

EXERCICE 1 (4 points)

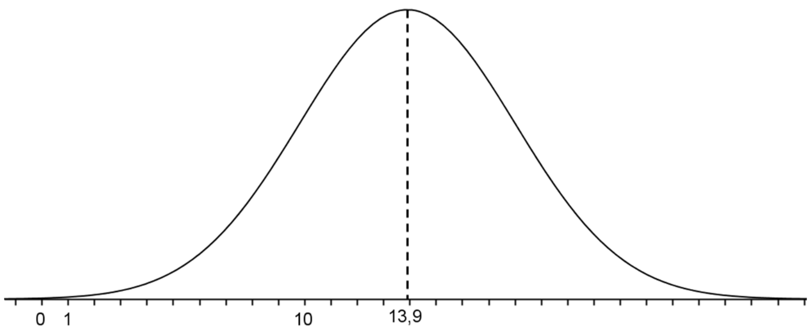
Commun à tous les candidats

Les deux parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13{,}9$ et d'écart type σ.

La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous :



1. On sait que $P(T \geqslant 22) = 0{,}023$.
En exploitant cette information :

a. Hachurer, sur le graphique donné en annexe page 10/10, deux domaines distincts dont l'aire est égale à 0,023.

b. Déterminer $P(5{,}8 \leqslant T \leqslant 22)$. Justifier le résultat.
Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est 4,1.

2. On choisit un jeune en France au hasard.

Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine. Arrondir au centième.

Partie B

Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.

La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des œuvres et la protection des droits sur internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.

Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole ($\mathcal{P}$) suivant :

On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.
Pour chaque jeune de cet échantillon :

- le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ;
  l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
- l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;

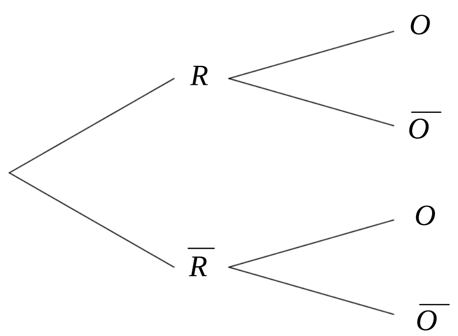
▪ si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
▪ si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
▪ si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

1. *Calculs de probabilités*
On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole $(\mathcal{P})$.
On note : R l'évènement « le résultat du lancer est pair ».
O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».

Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



En déduire que la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est :

$$q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

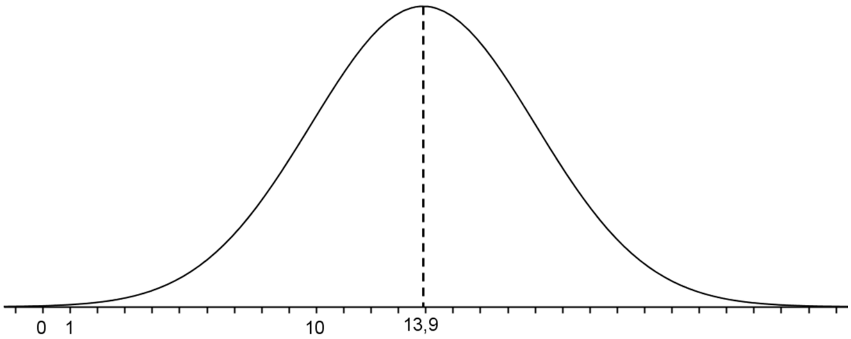
2. *Intervalle de confiance*

a. À la demande de la Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole $(\mathcal{P})$. Sur un échantillon de taille 1500, il dénombre 625 réponses « Oui ».
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

b. Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 1



EXERCICE 1

[Inde, Pondichéry 2016]

Partie A: Connexion à internet

1. a. Hachurons le graphique donné:

D'après l'énoncé: $P(T \geqslant 22) = 0,023$.

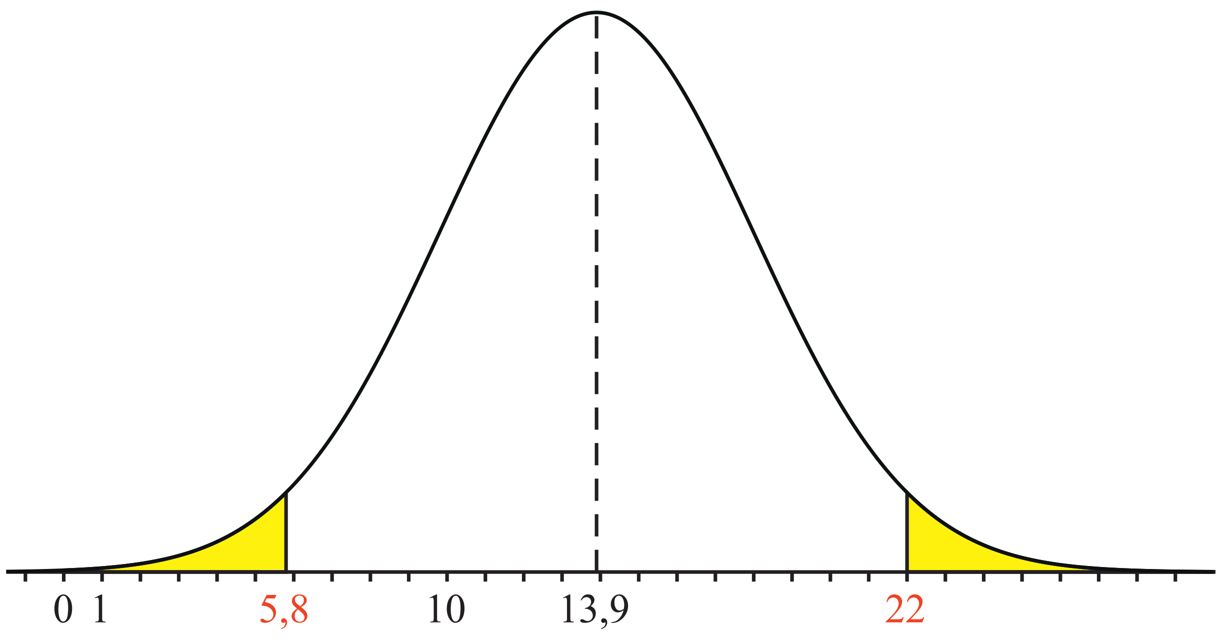
D'où la partie droite du graphique hachurée en jaune.

Or: $\mu = 13,9$.

Et: $22 - 13,9 = 8,1$ et $13,9 - 8,1 = 5,8$.

D'où la partie gauche du graphique hachurée en jaune.

Graphique donné en annexe page 9/10:



1. b. b1. Déterminons $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22)$ en justifiant:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T est la variable aléatoire qui correspond au temps hebdomadaire de connexion à internet (en heures).
- T suit la loi normale d'espérance $\mu = 13,9$ et d'écart type $\sigma = ?$
- T' suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22)$.

$P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) = P(T \leqslant 22) - P(T \leqslant 5,8)$

$= (1 - P(T \geqslant 22)) - P(T \leqslant 5,8)$

$= 1 - 2 \times P(T \leqslant 5,8)$

car $P(T \geqslant 22) = P(T \leqslant 5,8)$

$\Rightarrow$ $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) \approx 0,954$.

Au total, la probabilité demandée est: $0,954$ soit $95,4\%$.

1. b. b2. Montrons que $\sigma \approx 4,1$:

Nous savons que: $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

Ici, nous avons: $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) \approx 0,954$.

Par identification, nous avons:

$$\begin{cases} \mu - 2\sigma = 5,8 \\ \mu + 2\sigma = 22 \end{cases} \Rightarrow \sigma = 4,05.$$

Au total, la valeur recherchée de σ au dixième est: $\sigma = 4,1$.

2. Déterminons la probabilité que le jeune soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine:

Il s'agit de calculer: $P(T \geqslant 18)$.

$$P(T \geqslant 18) = P\left(\frac{T - \mu}{\sigma} \geqslant \frac{18 - 13,9}{4,1}\right)$$

$$= P(T' \geqslant 1)$$

$$= 1 - P(T' \leqslant 1).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $P(T \geqslant 18) \approx 16\%$.

Au total, la probabilité que le jeune soit connecté plus de 18 heures par semaine est d'environ: 16%.

EXERCICE 1

[Inde, Pondichéry 2016]

Partie B: La loi Hadopi

1. a. Reproduisons et complétons l'arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- R = " le résultat du lancer est pair ".
- O = " le jeune a répondu Oui ".
- $\overline{R}$ = " le résultat du lancer est impair ".
- $\overline{O}$ = " le jeune a répondu Non ".

- $P(R) = 3/6$
- $P(\overline{R}) = 3/6$

($3/6 + 3/6 = 1$).

- $P_R(O) = p$
- $P_R(\overline{O}) = 1 - p$

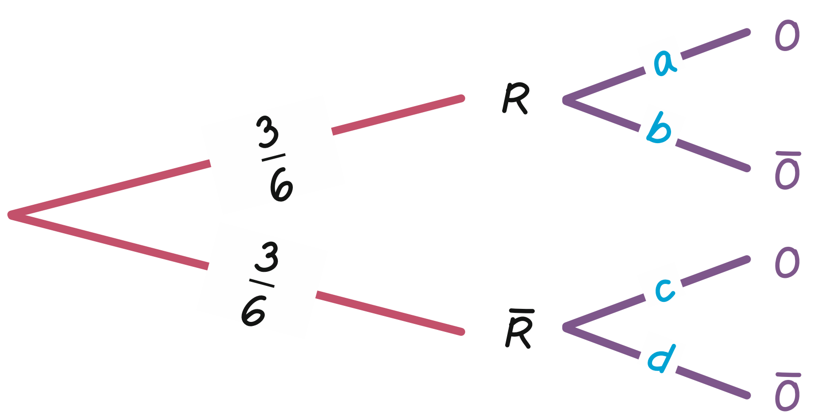
($p + (1 - p) = 1$).

- $P_{\overline{R}}(O) = 1/3$
- $P_{\overline{R}}(\overline{O}) = 2/3$

($1/3 + 2/3 = 1$).

Nous pouvons reproduire toutes ces données sur un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:
- $a = p$
- $b = 1 - p$
- $c = 1/3$
- $d = 2/3$

1. b. Déduisons-en que la probabilité q de l'événement = " le jeune a répondu Oui " est $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$:

Cela revient à calculer: $P(O)$.

Or, l'événement $O = (O \cap R) \cup (O \cap \bar{R})$.

D'où: $P(O) = P(O \cap R) + P(O \cap \bar{R})$

$$= P_R(O) \times P(R) + P_{\bar{R}}(O) \times P(\bar{R}).$$

Ainsi: $P(O) = p \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} \iff P(O) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

Au total, la probabilité demandée est bien: $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$.

2. a. Donnons un intervalle de confiance à 95% de la proportion q de jeunes qui répondent " Oui " au sondage:

Ici, nous avons:
- $n = 1500$
- $f = \frac{625}{1500} \Rightarrow f = \frac{5}{12}$.

Dans ces conditions:

$n = 1500 \geq 30$, $n\,.\,f = 625 \geq 5$ et $n\,.\,(1 - f) = 875 \geq 5$.

Les conditions étant réunies, un intervalle de confiance à 95% de la proportion q de jeunes qui répondent " Oui " à un tel sondage s'écrit:

$$I = [\,f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\,], \quad \text{cad:} \quad I = [\,\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, \frac{5}{12} + \frac{1}{\sqrt{n}}\,].$$

À l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\,0.390\,;\,0.443\,]$.

2. b. Que pouvons-nous dire sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

Nous savons que: • $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$

• $I \approx [\,0.390\,;\,0.443\,]$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire:

$q \in I$ ssi: $0.390 \leq q \leq 0.443$

$\iff 0.390 \leq \frac{1}{2}p + \frac{1}{6} \leq 0.443$

$\iff 0.447 \leq p \leq 0.553$.

Au total, nous pouvons dire que la proportion de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet est comprise entre: 44.7% et 55.3%.