EXERCICE 5

[Inde, Pondichéry 2016]

Partie A: Modélisation discrète

1. Déterminons la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes:

Déterminer la température au bout de 3 minutes revient à calculer T_3.

Or: • $T_0 = 25° C$,

• $T_1 = 0,85 \times T_0 + 15 \Rightarrow T_1 = 36,25° C$,

• $T_2 = 0,85 \times T_1 + 15 \Rightarrow T_2 = 45,8125° C$,

• $T_3 = 0,85 \times T_2 + 15 \Rightarrow T_3 = 53,94° C$.

En arrondissant à l'unité, nous pouvons affirmer que la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes sera de: 54 degrés Celsius.

2. Démontrons que, pour tout entier naturel n, $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$ ".

Initialisation: • $T_0 = 100 - 75 \times (0,85)^0 \Rightarrow T_0 \Rightarrow 25$.

Or $T_0 = 25° C$, d'après l'énoncé. Donc vrai au rang "0".

• $T_1 = 100 - 75 \times (0,85)^1 \Rightarrow T_1 = 36,25$.

Or $T_1 = 36,25$, d'après (1.). Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$

et montrons qu'alors: $T_{n+1} = 100 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}$.

Supposons: $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow 0,85\,T_n = 0,85(100 - 75 \times 0,85)^n$$

$$\Rightarrow 0,85\,T_n = 85 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow 0,85\,T_n + 15 = 100 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow T_{n+1} = 100 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$T_n = 100 - 75 \times (0,85)^n.$$

3. Déterminons au bout de combien de minutes la stérilisation débutera:

D'après l'énoncé, la stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85° C.

Donc la stérilisation débutera à partir du moment où: $T_n > 85$.

$$T_n > 85 \iff 100 - 75 \times 0,85^n > 85$$

$$\iff -75 \times 0,85^n > -15$$

$$\iff 75 \times 0,85^n < 15$$

$$\iff 0,85^n < 0,2$$

$$\iff n \ln(0,85) < \ln(0,2)$$

$$\iff n > \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,85)}, \quad \text{car:} \quad 0,85 \in]0,1[, \text{ et donc:} \quad \ln(0,85) < 0$$

$$\Rightarrow n > 9,90.$$

Nous prendrons $n = 10$ minutes car n est un entier naturel.

En conclusion, au bout de 10 minutes la stérilisation débutera.

EXERCICE 5

[Inde, Pondichéry 2016]

Partie B: Modélisation continue

1. a. Étudions le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$:

• **Calculons f':**

Ici: • $f(t) = 100 - 75e^{\frac{-\ln(5)}{10}t}$

• $Df = [0;+\infty[$.

Posons: $f = f_1 + f_2 \times f_3$, avec: $f_1(t) = 100$, $f_2(t) = -75$ et $f_3(t) = e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $[0;+\infty[$.

f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[0;+\infty[$.

Par conséquent, $h = f_2 \times f_3$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

Donc, f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme somme **$(f_1 + h)$** de 2 fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $t \in [0;+\infty[$.

Pour tout $t \in [0;+\infty[$: $f'(t) = 75\left(\frac{\ln(5)}{10}\right)e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$

$$\Rightarrow \quad f'(t) = 7,5\ln(5)e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}.$$

Au total: pour tout $t \in [0;+\infty[$, $f'(t) = 7,5\ln(5)e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$.

• **Étudions le signe de f' sur $[0;+\infty[$:**

Pour tout $t \in [0;+\infty[$: $f'(t) > 0$.

Donc pour tout $t \in [0;+\infty[$: f est strictement croissante.

• **Dressons le tableau de variation:**

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

t	0	$+\infty$
f'	$+$	
f	$a \nearrow$	b

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 25$,

• $b = f(+\infty) \Rightarrow b = 100$.

$$\left(\lim_{t \to +\infty} f(t) = 100 \quad \text{car: } \lim_{t \to +\infty} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} = 0\right)$$

1. b. Justifions que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$:

Supposons: $t \geq 10$ (1).

$$(1) \Rightarrow \frac{\ln(5) \times (10)}{10} \geq \ln(5)$$

$$\Rightarrow \frac{-\ln(5) \times (10)}{10} \leq -\ln(5)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-\ln(5) \times (10)}{10}} \leq e^{-\ln(5)}$$

$\Rightarrow \quad 100 - 75e^{\frac{-\ln(5) \times (10)}{10}} \geqslant 100 - 75 \times \left(\frac{1}{5}\right)$

$\Rightarrow \quad f(t) \geqslant 100 - 15$

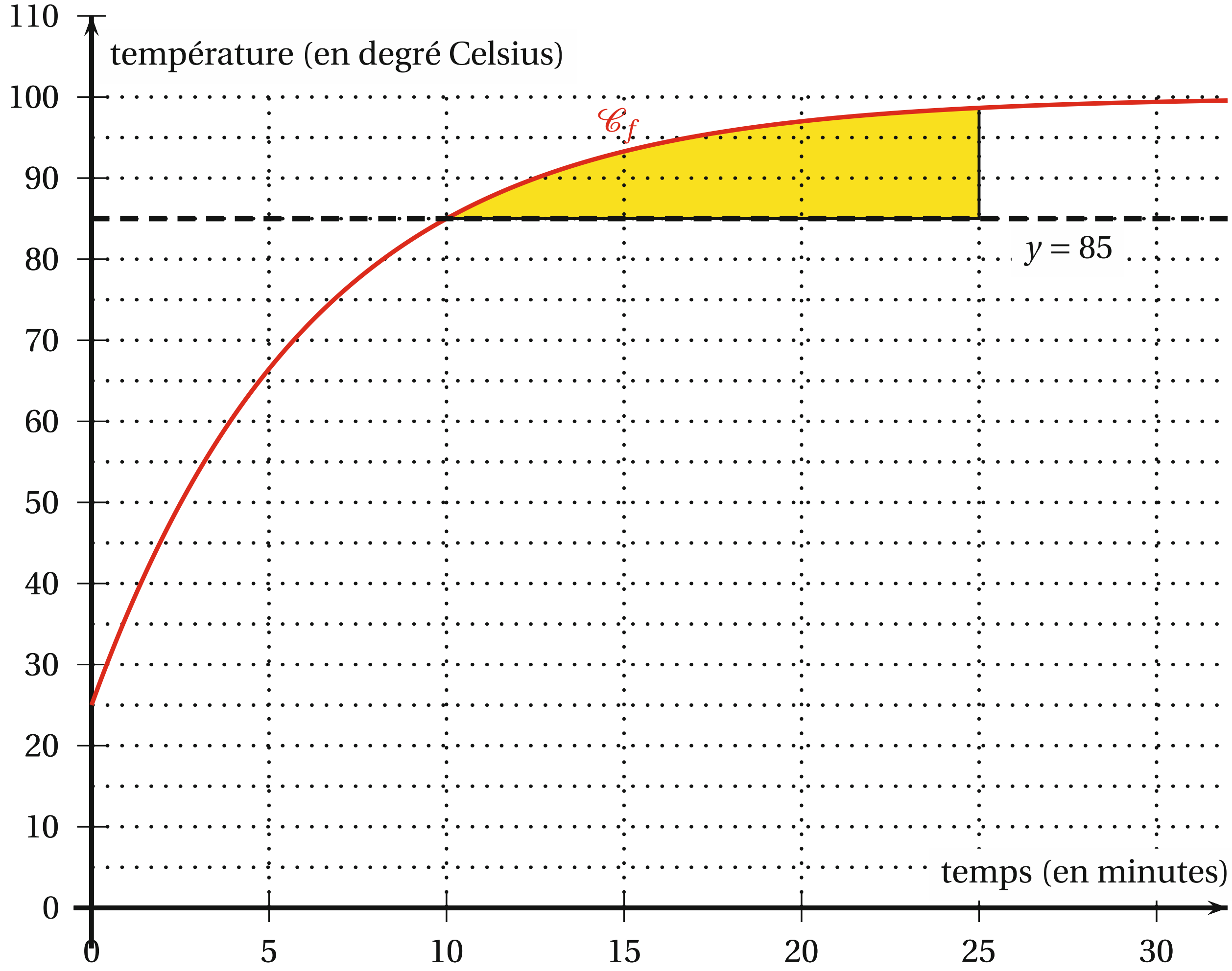
$\Rightarrow \quad f(t) \geqslant 85.$

Au total: si $t \geqslant 10$, alors $f(t) \geqslant 85$.

2. a. Justifions, à l'aide du graphique que $\mathscr{A}(25) > 80$:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathscr{A}(25)$ du domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = 25$, $y = 85$ et la courbe représentative de f, est telle que: $\mathscr{A}(25) \approx 100$.

Nous pouvons représenter cette aire $\mathscr{A}(25)$, en jaune, sur le graphique suivant:



En effet: • un rectangle correspond à 5 x 5 unités d'aire,

• dans la partie jaune, il y a 3 rectangles entiers + 2 demi-rectangles + des petits morceaux de rectangles, soit au minimum:

$3 \times (5 \times 5) + 2 \times \left(\frac{5 \times 5}{2}\right) + \varepsilon$ cad une centaine d'unités d'aire.

Au total, l'aire demandée $\mathscr{A}(25)$ est telle que: $\mathscr{A}(25) > 80$.

2. b. Montrons que $\mathscr{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt$:

$\mathscr{A}(\theta) = \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85)\,dt$.

La fonction " $f(t) - 85$ " est continue sur $[0;+\infty[$ donc sur $[10;\theta]$. Elle admet donc des primitives sur $[10;\theta]$ et par conséquent: $\mathscr{A}(\theta)$ existe.

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\theta) &= \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85)\,dt \\
&= \int_{10}^{\theta} \left(100 - 75e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} - 85\right)dt \\
&= \int_{10}^{\theta} \left(15 - 75e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\right)dt \\
&= \int_{10}^{\theta} 15\,dt - 75\int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt \\
&= [15t]_{10}^{\theta} - 75\int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathscr{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt.$$

Au total: l'égalité est bien vérifiée.

2. c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

La stérilisation est finie au bout de 20 minutes ssi: $\mathscr{A}(20) > 80$.

$$\mathscr{A}(20) > 80 \iff 15(20-10) - 75\int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt > 80$$

$$\iff -75\int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt > -70$$

$$\iff \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt < \frac{7}{7,5}.$$

Posons: $I = \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt.$

Ainsi: $I = \left[\frac{-10}{\ln(5)}\, e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\right]_{10}^{20}$

$$= \frac{-10}{\ln(5)}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right]$$

$$\Rightarrow \ I = \frac{8}{5 \times \ln(5)} > \frac{7}{7,5}.$$

Au total, au bout de 20 minutes, la stérilisation n'est pas finie car: $I > \frac{7}{7,5}$.