EXERCICE 4

[Inde, Pondichéry 2016]

1. L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur Cf ?

Non.

Justifions le.

L'aire $\mathscr{A}$ du rectangle OPMQ est:

Longueur x Largeur $= f(x) \times x$

$$\Rightarrow \mathscr{A}(x) = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Comme l'aire $\mathscr{A}$ est fonction de x, elle ne peut pas être constante car $x \in]0;14]$.

2. L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?

Oui.

Justifions le.

Nous devons calculer la valeur de " x " telle que: $\mathscr{A}'(x) = 0$.

Ici: • $\mathscr{A}(x) = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

• $D_{\mathscr{A}} =]0;14]$.

Posons: $\mathscr{A} = f_1 + f_2 \times f_3$, avec: $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = -x$ et $f_3(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $]0;14]$.

f_3 est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur $]0;14]$.

Par conséquent, $f_2 \times f_3$ est dérivable sur $]0;14]$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $]0;14]$.

Enfin, $\mathcal{A}$ est dérivable sur $]0;14]$ comme somme $(f_1 + f_2 \times f_3)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0;14]$.

Ainsi, nous pouvons calculer $\mathcal{A}'$ pour tout $x \in]0;14]$.

Pour tout $x \in]0;14]$: $\mathcal{A}'(x) = 2 - \left(1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow \mathcal{A}'(x) = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Dans ces conditions: $\mathcal{A}'(x) = 0$ ssi: $x = 2e$.

Notons que:
- $\mathcal{A}$ est croissante sur $]0;2e]$
- $\mathcal{A}$ est décroissante sur $[2e;14]$
- $\mathcal{A}$ est maximale quand $x = 2e$.

En conclusion: le point $M(2e;f(2e))$ cad $M(2e;1)$ est tel que l'aire du rectangle OPMQ est maximale.

Cette aire maximale est égale à: $\mathcal{A}_{max} = 2 \times (2e) - (2e)\ln\left(\frac{2e}{2}\right)$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{max} = 2e.$$