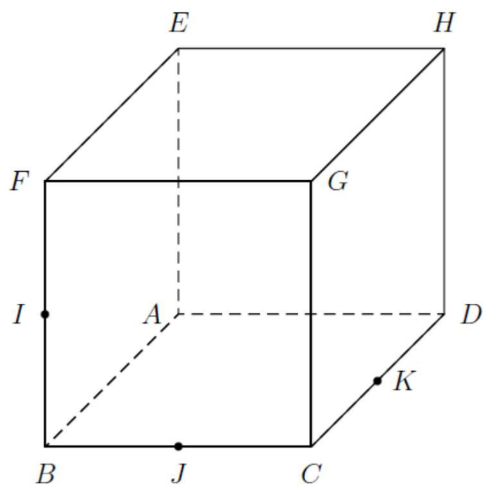
EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[BC]$.
Le point K est le milieu du segment $[CD]$.



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification.

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.

Construire, sur la figure fournie en annexe page 10/10 et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection $\mathscr{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3. On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle [0 ;1] tel que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AG}$.

a. Démontrer que $MI^2=3t^2-3t+\dfrac{5}{4}$.

b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Démontrer que pour ce point $N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$:

a. N appartient au plan (IJK).

b. La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

EXERCICE 3

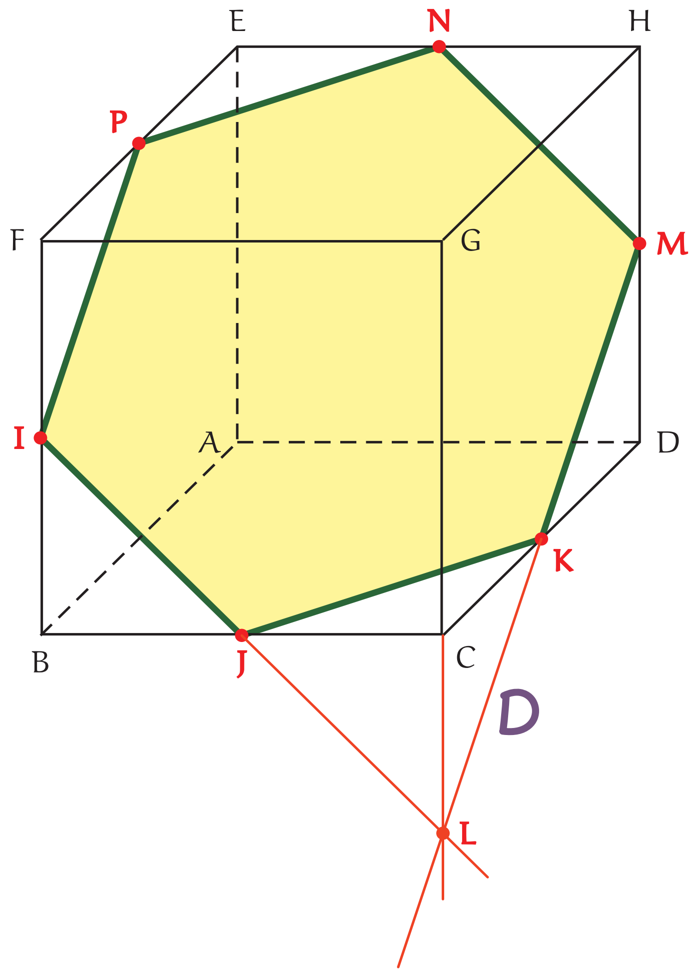
[Inde, Pondichéry 2016]

Partie A:

Construisons sur la figure en laissant apparents les traits de construction:

- le point L ;
- l'intersection D des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Graphiquement, nous avons:



Partie B:

1. Donnons les coordonnées de A, G, I, J et K dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$:

Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, les coordonnées des points A, G, I, J et K sont:

- $A\,(0;0;0)$;

- $G\,(1;1;1)$ car: $\overrightarrow{AG} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{FG} + 1 \times \overrightarrow{BF}$

  cad: $\overrightarrow{AG} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AE}$;

- $I\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$ car: $\overrightarrow{AI} = 1 \times \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{BF}$

  cad: $\overrightarrow{AI} = 1 \times \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AE}$;

- $J\left(1;\frac{1}{2};0\right)$ car: $\overrightarrow{AJ} = 1 \times \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{BC}$

  cad: $\overrightarrow{AJ} = 1 \times \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AD}$;

- $K\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ car: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{DC} + 1 \times \overrightarrow{AD}$

  cad: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AD}$.

Au total:

- $A\,(0;0;0)$
- $G\,(1;1;1)$
- $I\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$
- $J\left(1;\frac{1}{2};0\right)$
- $K\left(\frac{1}{2};1;0\right)$.

2. a. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK):

D'après le cours: un vecteur $\vec{n}$ $(a\,;\,b\,;\,c)$ est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Ici: • il s'agit du plan (IJK);

• 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont respectivement: $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$;

• $\vec{n}$ (1; 1; 1) car: $\vec{n} = \overrightarrow{AG}$.

Or: $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Et: • $\vec{n}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux car: $(1 \times 0) + \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(1 \times -\frac{1}{2}\right) = 0$;

• $\vec{n}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont orthogonaux car: $\left(1 \times -\frac{1}{2}\right) + (1 \times 1) + \left(1 \times -\frac{1}{2}\right) = 0$.

Par conséquent: $\vec{n}$ est bien orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan. Donc $\vec{n}$ (1; 1; 1) est un vecteur normal au plan (IJK).

2. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (IJK):

Ici: • $\vec{n}$ $(a = 1\,;\, b = 1\,;\, c = 1)$ est un vecteur normal au plan (IJK);

• $I\left(1\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ est un point de l'espace.

D'où, une équation cartésienne du plan passant par I et de vecteur normal $\vec{n}$ est: $a\,(x - x_I) + b\,(y - y_I) + c\,(z - z_I) = 0 \Rightarrow x + y + z - \frac{3}{2} = 0$.

En conclusion, une équation cartésienne du plan (IJK) est: $x + y + z = \frac{3}{2}$.

3. a. Démontrons que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$:

D'après l'énoncé, le point M appartient au segment [AG] avec:

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AG}, \quad t \in [0;\ 1].$$

D'où: $\overrightarrow{AM} = t \cdot (1;\ 1;\ 1) \iff \overrightarrow{AM} = (t\ ;\ t\ ;\ t)$.

Donc les coordonnées du point M sont: $M\,(t\ ;\ t\ ;\ t)$.

De plus, nous savons que: $I\left(1;\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$.

Or: $MI^2 = (x_I - x_M)^2 + (y_I - y_M)^2 + (z_I - z_M)^2$

$\iff MI^2 = (1 - t)^2 + (0 - t)^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2$

$\Rightarrow MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.

Au total, nous avons bien: $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.

3. b. Démontrons que la distance MI est minimale au point N:

Soit f la fonction définie sur $[0;\ 1]$ par: $f\,(t) = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.

f est dérivable sur $[0;\ 1]$ comme fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\ 1]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer $f\,'$ sur $[0;\ 1]$:

$$f\,'(t) = 6t - 3, \text{ pour tout } t \in [0;\ 1].$$

La distance MI est minimale quand $f\,'(t) = 0$.

$$f\,'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Au total: la distance MI est minimale quand $t = \frac{1}{2}$ cad au point $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ que l'on nomme **N**.

4. a. Montrons que N appartient au plan (IJK):

Le point $N\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ appartient au plan (IJK) ssi ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de ce plan cad: $x + y + z = \frac{3}{2}$.

Or: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Au total: ***oui*** N appartient au plan (IJK).

4. b. Montrons que la droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF):

Nous avons: $\overrightarrow{IN}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De plus: $\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$ et $\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$.

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux comme les vecteurs $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{BF}$.

Au total: la droite (IN) est bien perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).