Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 10 pages numérotées de 1/10 à 10/10.

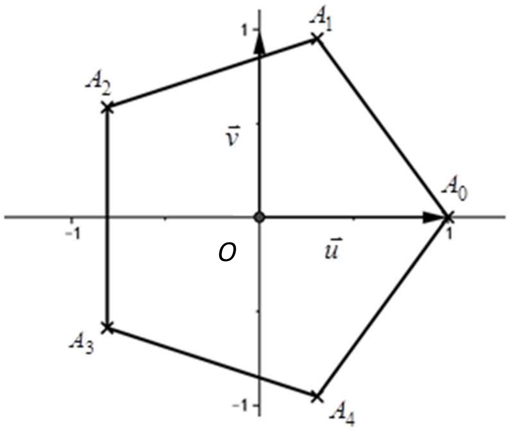
Le sujet comporte deux feuilles d'annexes à la page 9/10 et 10/10, à remettre avec la copie.

EXERCICE 2 (3 points)

Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$ de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0}=\vec{u}$.



On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$ ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0\,;1\,;2\,;3\}$ on a $\left(\overrightarrow{OA_k}\,;\overrightarrow{OA_{k+1}}\right)=\dfrac{2\pi}{5}$.

1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

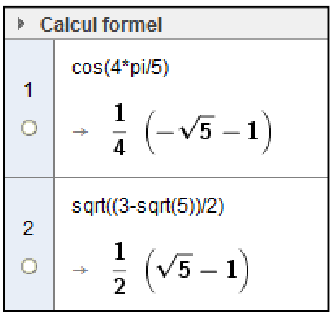
Le cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon $\dfrac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K.

Calculer BJ, puis en déduire BK.

2. a. Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.

b. Démontrer que $BA_2{}^2=2+2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

c. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :



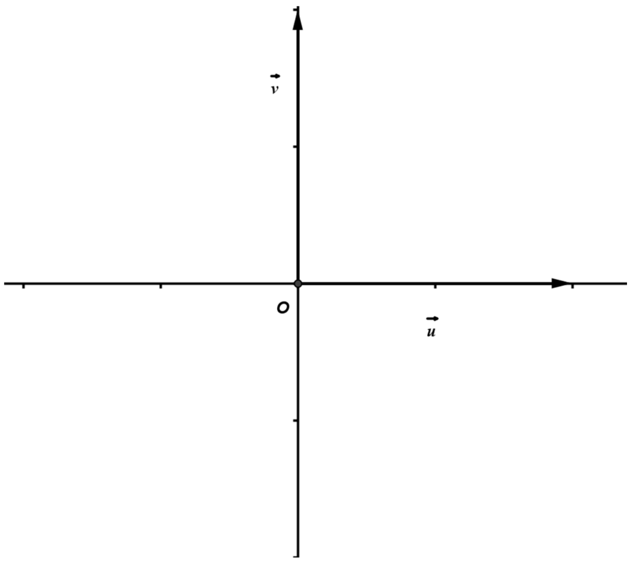
« sqrt » signifie « racine carrée »

En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2=BK$.

3. Dans le repère $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ donné en annexe page 9/10, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.

ANNEXE 1 à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 2



EXERCICE 2 (Inde, Pondichery 2016)

① Calculons BJ et déduisons-en BK :

D'après l'énoncé : • $B(z_B)$ avec $z_B = -1$,

• $J(z_J)$ avec $z_J = \frac{1}{2} i$.

Etape 1 :

L'équation d'un cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Ici : le centre est $J(0, 1/2)$ et le rayon est $R = 1/2$.

D'où : $\mathscr{C}$ est un cercle d'équation : $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Etape 2 :

$B(-1, 0)$ et $J(0, 1/2)$.

Or : l'équation du segment [BJ] est de la forme : $y = ax + b$. (1)

Comme B et J appartiennent au segment [BJ], nous avons le système suivant :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -a + b \\ 1/2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/2 \end{cases}.$$

D'où : le segment [BJ] a pour équation : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Etape 3 : Calcul de BJ.

$$BJ = |z_J - z_B| \Leftrightarrow BJ = \left|\frac{1}{2} i + 1\right| \Rightarrow BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Au total : $BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Etape 4 : Calcul de BK.

Le point K vérifie le système :

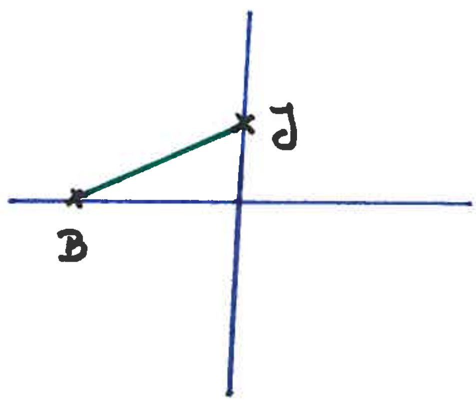
$$\begin{cases} x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2=\frac{1}{4} \\ y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{1}{5} \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ ou } x=\frac{\sqrt{5}}{5} \\ y=-\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2} \text{ ou } y=\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où 2 solutions : $U_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\right)$ et $U_2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\right)$.

Nous retiendrons la solution U_1 car graphiquement nous voyons que le point K a une abscisse et une ordonnée forcément négatifs.



Au total : • $K(z_K)$ avec : $z_K=-\frac{\sqrt{5}}{5}+i\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\right)$,

• $BK=|z_K-z_B| \Rightarrow BK=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

② a) Donnons la forme exponentielle de l'affixe z_2 de A_2 :

ⓐ • Le module de z_2 est : $|z_2| = 1$.

En effet, d'après l'énoncé : • $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$

• les 5 côtés ont la même longueur.

Donc : $\overrightarrow{OA_2} = \vec{u}$, avec $|\vec{u}| = 1$.

ⓑ • L'argument de z_2 est : $\theta = \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{5}\ [2\pi]$.

Sous forme exponentielle z_2 s'écrit : $z_2 = 1 . e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

ⓑ Démontrons que $BA_2^2 = 2 + 2\cos(4\pi/5)$:

$$BA_2^2 = |z_2 - z_B|^2 \Leftrightarrow BA_2^2 = \left(\left(\cos(4\pi/5) + 1\right)^2 + \left(\sin(4\pi/5)\right)^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow BA_2^2 = \cos^2(4\pi/5) + \sin^2(4\pi/5) + 1 + 2\cos(4\pi/5)$$

$$\Rightarrow BA_2^2 = 2 + 2\cos(4\pi/5).$$

Au total : $BA_2^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

ⓒ Déduisons-en que $BA_2 = BK$:

D'après le logiciel : • $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(-\sqrt{5} - 1)$,

• $\left(\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\right)^{1/2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Or : $BA_2 = \left(2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^{1/2} \Leftrightarrow BA_2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{1/2}$

$$\Leftrightarrow BA_2 = \left(\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow BA_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Au total : $BA_2 = BK = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

③ Construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier :

Nous obtenons le graphique suivant :