EXERCICE 3

[Inde 2015]

Partie A: Durée de vie d'un appareil électroménager

1. a. A l'aide du graphique, déterminons $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est une variable aléatoire qui correspond à la durée de vie d'un type de lave-vaisselle (en mois).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 84$ et d'écart type $\sigma = ?$.

A l'aide du graphique: $P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - 2 \times 0,16$

$\Rightarrow$ $P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 0,68$.

Au total: $P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 0,68$.

1. b. Déterminons une valeur approchée de σ:

Il s'agit de déterminer σ sachant que: $P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 0,68$.

Nous remarquons que: $64 = \mu - \sigma$ et $104 = \mu + \sigma$,

car: $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$.

Par identification:

$$\begin{cases} \mu + \sigma = 104 \\ \mu - \sigma = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 84 + \sigma = 104 \\ 84 - \sigma = 64 \end{cases} \Rightarrow \sigma = 20.$$

Au total, une valeur approchée de σ est : $\sigma = 20$.

2. a. Déterminons la loi suivie par Z :

$Z = \dfrac{X - 84}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

2. b. Justifions que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right)$:

$$P(X \leqslant 64) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{64 - 84}{\sigma}\right) \quad \left(\text{car : } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leqslant -\frac{20}{\sigma}\right).$$

Au total, nous avons bien : $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right)$.

2. c. Déduisons-en la valeur de σ, arrondie à 10^{-3} :

D'après l'énoncé, nous savons que :

- $P(X \leqslant 64) = 0,16$.

$P(X \leqslant 64) = 0,16 \iff P\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0,16$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve :

$$-\frac{20}{\sigma} \approx -1 \implies \sigma \approx 20.$$

Au total, la valeur de σ, arrondie à 10^{-3} est : $\sigma \approx 20$.

3. a. Calculons $P(2 \text{ ans} \leqslant X \leqslant 5 \text{ ans})$:

$P(2 \text{ ans} \leqslant X \leqslant 5 \text{ ans}) = P(24 \text{ mois} \leqslant X \leqslant 60 \text{ mois})$.

$$P(24 \leqslant X \leqslant 60) = P\left(\frac{24-84}{20,1} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{60-84}{20,1}\right)$$

$$= P(-2,985 \leqslant Z \leqslant -1,194)$$

$$= (1 - P(Z \leqslant 1,194)) - (1 - P(Z \leqslant 2,985)).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(24 \leqslant X \leqslant 60) \approx 11,5\%.$$

Au total, la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans est d'environ: $11,5\%$.

3. b. Calculons P (X ⩾ 10 ans):

$P(X \geqslant 10 \text{ ans}) = P(X \geqslant 120 \text{ mois})$.

$$P(X \geqslant 120) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{120-84}{20,1}\right)$$

$$= P(Z \geqslant 1,791)$$

$$= 1 - P(Z \leqslant 1,791).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X \geqslant 10 \text{ ans}) \approx 3,7\%.$$

Au total, la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans est d'environ: $3,7\%$.

EXERCICE 3

[Inde 2015]

Partie B: L'extension de garantie

1. a. Déterminons la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer l'extension de garantie:

Soit l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie.

Soient les événements A = " faire jouer l'extension de garantie ", et $\bar{A}$ = " ne pas faire jouer l'extension de garantie ".

On désigne par X le nombre de clients qui font jouer l'extension de garantie parmi les 12 clients tirés au hasard.

Nous sommes en présence de 12 épreuves aléatoires indépendantes, avec $\Omega = \{ A ; \bar{A} \}$ et $X(\Omega) = \{ 0, 1, 2, ..., 12 \}$.

La variable aléatoire discréte X représentant le nombre de réalisations de A suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 12$ et $p = 11.5\%$.

Et nous pouvons noter: $X \leadsto B(12 ; 11.5\%)$.

En fait, on répéte 12 fois un schéma de Bernoulli.

Ici, nous devons calculer: $P(X = 3)$ avec: $X \leadsto B(12 ; 11.5\%)$.

Or: $P(X = 3) = \binom{12}{3} (11.5\%)^3 (88.5\%)^9$

$\Rightarrow$ $P(X = 3) \approx 11.1\%$; à 10^{-3} près.

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer l'extension de garantie est de: 11. 1%.

1. b. Calculons $P(X \geq 6)$:

$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6)$

$= 1 - P(X \leq 5)$.

Dans ces conditions: $P(X \geq 6) \approx 0.1\%$, à 10^{-3} près.

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, la probabilité qu'au moins 6, sur ces 12 clients, fassent jouer cette extension de garantie est de: 0. 1%.

2. a. Justifions que Y prend les valeurs " 65 " et " - 334 " et donnons la loi de probabilité de Y:

Distinguons 2 cas:

- Le client régle 65 € l'extension de garantie.

Et une panne irréparable survient entre le début de la 3^e année et la fin de la 5^e année.

Donc l'entreprise rembourse 399 €

D'où perte pour l'entreprise: 65 - 399 = - 334 €.

- Le client régle 65 € l'extension de garantie.

Et soit aucune panne ne survient, soit elle est réparable.

D'où gain pour l'entreprise: 65 €.

Ainsi, si Y est la variable aléatoire représentant le gain réalisé par l'entreprise, la loi de probabilité de Y est:

$Y = y_j$	-334	65
$P(Y = y_j)$	11.5%	88.5%

Et, nous avons bien: $11.5\% + 88.5\% = 1$.

2. b. Offre avantageuse pour l'entreprise ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer: $E(Y)$.

$E(Y) = -334 \times 11.5\% + 65 \times 88.5\%$

$\Rightarrow E(Y) \approx 19.115$ €.

Comme $E(Y) > 0$, nous pouvons affirmer que l'offre est avantageuse pour l'entreprise.