# EXERCICE 2

## [ Inde 2015 ]

### Partie A:

**1. Montrons que $(V_n)$ est géométrique de raison a:**

Nous savons que:

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $V_n = U_n - \dfrac{b}{1-a}$, $\left(U_n = V_n + \dfrac{b}{1-a}\right)$

- donc: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = U_{n+1} - \dfrac{b}{1-a}$.

Ainsi: $V_{n+1} = (a\,U_n + b) - \dfrac{b}{1-a}$

$$= \left(a\left[V_n + \frac{b}{1-a}\right] + b\right) - \frac{b}{1-a}$$

$$= a \times V_n + \frac{ab}{1-a} + \frac{b(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = a \times V_n.$$

Par conséquent, $(V_n)$ est bien une suite géométrique de raison $q = a$ et de premier terme $V_0 = U_0 - \dfrac{b}{1-a}$.

Nous pouvons alors écrire: $V_n = \left(U_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) \times (a)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

**2. Déduisons-en la limite de la suite $(U_n)$:**

$V_n = U_n - \dfrac{b}{1-a} \iff U_n = V_n + \dfrac{b}{1-a}$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n + \dfrac{b}{1-a}$.

Or: $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$, car: $a \in ]-1, 1[$, et donc: $\lim\limits_{n\to+\infty} (a)^n = 0$.

D'où: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 + \dfrac{b}{1-a}$

=> $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{b}{1-a}$.

Au total: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{b}{1-a}$, et nous pouvons affirmer que la suite $(U_n)$ est convergente et converge vers $\dfrac{b}{1-a}$.

Donc oui si $a \in ]-1, 1[$, $(U_n)$ a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

## Partie B:

**1. Déterminons la hauteur de la plante en mars 2016:**

$$80 \text{ cm} - 20 \text{ cm} + 30 \text{ cm} = 90 \text{ cm}.$$

| 80 cm | 20 cm | 30 cm |
| --- | --- | --- |
| taille initiale | quart de la hauteur | pousse naturelle |

**2. a. Justifions que, pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0,75\, h_n + 30$:**

- D'après l'énoncé, en mars 2015, la plante mesure 80 cm.

D'où: $h_0 = 80$ cm.

- De plus, chaque année Max coupe un quart de la hauteur de la plante, soit 25%, et cette dernière pousse de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Soient: • $h_{n+1}$, la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars $(2015 + (n + 1))$,

• $h_n$, la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars $(2015 + (n))$.

Pour tout entier naturel n, la hauteur de la plante " $h_{n+1}$ " est égale à sa hauteur " $h_n$ " diminuée de 25% et augmentée de 30 cm.

Donc pour tout entier naturel n:

$h_{n+1} = h_n - 25\%\ h_n + 30 \Rightarrow h_{n+1} = 0,75 \times h_n + 30.$

**2. b. Montrons par récurrence que la suite $(h_n)$ est strictement croissante:**

Les calculs faits au brouillon permettent d'affirmer que, a priori, la suite $(h_n)$ est strictement croissante.

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $h_{n+1} > h_n$ ".

**Initialisation**: • $h_1 = 90 > h_0 = 80.$

Donc vrai au rang " 1 ".

• $h_2 = 0,75 \times 90 + 30 > h_1 = 90.$

Donc vrai au rang " 2 ".

**Hérédité**: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $h_{n+1} > h_n$

et montrons qu'alors: $h_{n+2} > h_{n+1}$.

**Supposons**: $h_{n+1} \geqslant h_n$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(1) $\Rightarrow 0,75\ h_{n+1} > 0,75\ h_n$

$\Rightarrow 0,75\ h_{n+1} + 30 > 0,75\ h_n + 30$

$\Rightarrow h_{n+2} > h_{n+1}.$

**Conclusion**: Pour tout entier naturel $n$, $h_{n+1} > h_n$, ce qui revient à dire que la suite $(h_n)$ est bien strictement croissante.

**2. c. La suite $(h_n)$ est-elle convergente ?**

Nous savons que:

- $U_{n+1} = a\, U_n + b$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{b}{1 - a}$.

Or ici: $h_{n+1} = 0,75\, h_n + 30$.

Par identification, nous pouvons poser:

$a = 0,75$ et $b = 30$.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} h_n = \frac{30}{1 - 0,75} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} h_n = 120.$$

Donc oui la suite $(h_n)$ est convergente et converge vers 120 cm.

Cela signifie qu'au bout de " n " années (" n " très grand), la hauteur de la plante tendra vers 120 cm.