Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet comporte une annexe numérotée 7/7 à remettre avec la copie.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel *n*, par la relation $u_{n+1} = au_n + b$ (a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$).

On pose, pour tout entier naturel *n*, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison *a*.
2. En déduire que si *a* appartient à l'intervalle] –1 ; 1[, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel *n*, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année (2015 + *n*).

   a. Justifier que, pour tout entier naturel *n*, $h_{n+1} = 0{,}75h_n + 30$.

   b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).
   Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

   c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

[Inde 2015]

Partie A:

1. Montrons que (V_n) est géométrique de raison a:

Nous savons que:

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $V_n = U_n - \dfrac{b}{1-a}$, $\left(U_n = V_n + \dfrac{b}{1-a}\right)$

- donc: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = U_{n+1} - \dfrac{b}{1-a}$.

Ainsi: $V_{n+1} = (a\,U_n + b) - \dfrac{b}{1-a}$

$$= \left(a\left[V_n + \frac{b}{1-a}\right] + b\right) - \frac{b}{1-a}$$

$$= a \times V_n + \frac{ab}{1-a} + \frac{b(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = a \times V_n.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = a$ et de premier terme $V_0 = U_0 - \dfrac{b}{1-a}$.

Nous pouvons alors écrire: $V_n = \left(U_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) \times (a)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. Déduisons-en la limite de la suite (U_n):

$V_n = U_n - \dfrac{b}{1-a} \iff U_n = V_n + \dfrac{b}{1-a}$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n + \dfrac{b}{1-a}$.

Or: $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$, car: $a \in]-1, 1[$, et donc: $\lim\limits_{n \to +\infty} (a)^n = 0$.

D'où: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 + \dfrac{b}{1-a}$

=> $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{b}{1-a}$.

Au total: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{b}{1-a}$, et nous pouvons affirmer que la suite (U_n) est convergente et converge vers $\dfrac{b}{1-a}$.

Donc oui si $a \in]-1, 1[$, (U_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B:

1. Déterminons la hauteur de la plante en mars 2016:

$\underbrace{80 \text{ cm}}_{\text{taille initiale}} - \underbrace{20 \text{ cm}}_{\text{quart de la hauteur}} + \underbrace{30 \text{ cm}}_{\text{pousse naturelle}} = 90 \text{ cm}.$

2. a. Justifions que, pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0,75\, h_n + 30$:

- D'après l'énoncé, en mars 2015, la plante mesure 80 cm.

D'où: $h_0 = 80$ cm.

- De plus, chaque année Max coupe un quart de la hauteur de la plante, soit 25%, et cette dernière pousse de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Soient: • h_{n+1}, la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars $(2015 + (n + 1))$,

• h_n, la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars $(2015 + (n))$.

Pour tout entier naturel n, la hauteur de la plante " h_{n+1} " est égale à sa hauteur " h_n " diminuée de 25% et augmentée de 30 cm.

Donc pour tout entier naturel n:

$h_{n+1} = h_n - 25\%\ h_n + 30 \Rightarrow h_{n+1} = 0,75 \times h_n + 30.$

2. b. Montrons par récurrence que la suite (h_n) est strictement croissante:

Les calculs faits au brouillon permettent d'affirmer que, a priori, la suite (h_n) est strictement croissante.

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $h_{n+1} > h_n$ ".

Initialisation: • $h_1 = 90 > h_0 = 80.$

Donc vrai au rang " 1 ".

• $h_2 = 0,75 \times 90 + 30 > h_1 = 90.$

Donc vrai au rang " 2 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $h_{n+1} > h_n$

et montrons qu'alors: $h_{n+2} > h_{n+1}$.

Supposons: $h_{n+1} \geqslant h_n$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$(1) \Rightarrow 0,75\ h_{n+1} > 0,75\ h_n$

$\Rightarrow 0,75\ h_{n+1} + 30 > 0,75\ h_n + 30$

$\Rightarrow h_{n+2} > h_{n+1}.$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $h_{n+1} > h_n$, ce qui revient à dire que la suite (h_n) est bien strictement croissante.

2. c. La suite (h_n) est-elle convergente ?

Nous savons que:

- $U_{n+1} = a\, U_n + b$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{b}{1 - a}$.

Or ici: $h_{n+1} = 0,75\, h_n + 30$.

Par identification, nous pouvons poser:

$a = 0,75$ et $b = 30$.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} h_n = \frac{30}{1 - 0,75} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} h_n = 120.$$

Donc oui la suite (h_n) est convergente et converge vers 120 cm.

Cela signifie qu'au bout de " n " années (" n " très grand), la hauteur de la plante tendra vers 120 cm.