Corrigé

Exercice 3

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT S

NOMBRES COMPLEXES, BAC S

- Affixe d'un nombre complexe
- Écriture algébrique d'un nombre complexe
- Nombre complexe conjugué
- Écriture géométrique d'un nombre complexe
- Écriture trigonométrique d'un nombre complexe
- Argument d'un nombre complexe
- Module d'un nombre complexe
- Partie imaginaire d'un nombre complexe
- Partie réelle d'un nombre complexe
- Représentation géométrique d'un nombre complexe
- Triangle équilatéral direct

EXERCICE 3

[France Métropolitaine 2019]

1. **L'affirmation 1 est**: Vraie.

En effet, dans **un premier temps** déterminons les affixes des points A, B et O.

Soit l'équation (E): $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4$ cad: $\Delta = -4 = (2i)^2 < 0$.

D'où deux solutions dans $\mathbb{C}$: • $z_A = \dfrac{2\sqrt{3} - 2i}{2}$ cad: $z_A = \sqrt{3} - i$,

• $z_B = \dfrac{2\sqrt{3} + 2i}{2}$ cad: $z_B = \sqrt{3} + i$.

Ainsi les affixes respectifs des points A, B et O sont:

• $A(z_A)$, avec: $z_A = \sqrt{3} - i$,

• $B(z_B)$, avec: $z_B = \sqrt{3} + i$,

• $O(z_O)$, avec: $z_O = 0$.

Dans **un second temps**, nous savons que le triangle OAB est équilatéral ssi:

$$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Or ici: $\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}$

$$= \frac{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$= 1 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Au total: comme $\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, **le triangle OAB est équilatéral**.

2. L'affirmation 2 est: Fausse.

En effet, soit $X = U^{2019} + \overline{U}^{2019}$, avec: $U = \sqrt{3} + i$.

$$X = (\sqrt{3} + i)^{2019} + (\sqrt{3} - i)^{2019}$$

$$= 2^{2019} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)^{2019} + 2^{2019} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)^{2019}$$

$$= 2^{2019} \left(\cos\left(\frac{2019\,\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2019\,\pi}{6}\right) \right)$$

$$+ 2^{2019} \left(\cos\left(-\frac{2019\,\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{2019\,\pi}{6}\right) \right).$$

Or: $2019 = 2016 + 3$ et $2016 = 336 \times 6$.

D'où: $X = 2^{2019} \left(\cos\left[\left(336 + \frac{1}{2}\right) \pi \right] + i \sin\left[\left(336 + \frac{1}{2}\right) \pi \right] \right) +$

$$2^{2019} \left(\cos\left[-\left(336 + \frac{1}{2}\right) \pi \right] + i \sin\left[-\left(336 + \frac{1}{2}\right) \pi \right] \right).$$

Comme:
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$,

$$X = 2 \times 2^{2019} \cos\left[\frac{\pi}{2} + 336\pi\right]$$

$$= 2^{2020} \times [-\sin(336\pi)]$$

$$= 0, \text{ car: } \sin(336\pi) \neq 0.$$

Au total: $U^{2019} + \overline{U}^{2019} = 0 \neq 2^{2019}$.

3. **L'affirmation 3 est**: Vraie.

En effet, soit la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par: $f_n(x) = x\, e^{-nx+1}$.

$[u \times v]$

f_n est dérivable sur $[0; +\infty[$ et: $f'_n(x) = (1 \times e^{-nx+1}) + (x \times (-n)\, e^{-nx+1})$

$[u' \times v + u \times v']$

cad: $f'_n(x) = e^{-nx+1} \times (1 - nx)$.

Dans ces conditions: $f'_n(x) = 0$ ssi $1 - nx = 0$ **cad**: $x = \frac{1}{n}$, car $e^{-nx+1} > 0$.

Notons que:
- f_n est croissante sur $\left[0; \frac{1}{n}\right]$,
- f_n est décroissante sur $\left[\frac{1}{n}; +\infty\right[$.

D'où: le point $A\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$ est bien un maximum pour f_n sur $[0; +\infty[$.

Au total: pour tout entier naturel $n \geq 1$, la fonction f_n admet bien un maximum.

4. **L'affirmation 4 est**: Vraie.

En effet, d'après le cours une courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ ssi:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Or ici: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)\, e^{-x}$.

De plus nous avons: $\cos(x) \in [-1; 1]$ et donc: $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dans ces conditions: $-1 \times e^{-x} \leqslant \cos(x)\, e^{-x} \leqslant 1 \times e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\iff \frac{-1}{e^x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{e^x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Et:
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{e^x} = 0,$
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0.$

D'où, d'après le théorème des gendarmes nous pouvons affirmer que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Au total: la courbe $\mathcal{C}$ admet bien une asymptote en $+\infty$.

5. **L'affirmation 5 est**: **Fausse**.

En effet, si la variable I contient la valeur 15 en fin d'exécution de cet algorithme, nous avons:
- $2^{14} \leqslant A$
- $A \leqslant 2^{15}$

D'où: $2^{14} \leqslant A \leqslant 2^{15} \iff 14 \ln(2) \leqslant \ln(A) \leqslant 15 \ln(2)$.

Au total: nous avons $14 \ln(2) \leqslant \ln(A) \leqslant 15 \ln(2)$ et non pas $15 \ln(2) \leqslant \ln(A) \leqslant 16 \ln(2)$.