

# Corrigé

## Exercice 4



---

---

freemaths.fr

---

---

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU VENDREDI 22 JUIN 2018

## MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Spécialité Coefficient : 9

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

**Partie A**

On considère l'équation suivante dont les inconnues  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels :

$$x^2 - 8y^2 = 1. \quad (E)$$

1. Déterminer un couple solution  $(x ; y)$  où  $x$  et  $y$  sont deux entiers naturels.
2. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

On définit les suites d'entiers naturels  $(x_n)$  et  $(y_n)$  par :

$$x_0 = 1, y_0 = 0, \text{ et pour tout entier naturel } n, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , le couple  $(x_n; y_n)$  est solution de l'équation  $(E)$ .
  - b. En admettant que la suite  $(x_n)$  est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $x_{n+1} > x_n$ .
3. En déduire que l'équation  $(E)$  admet une infinité de couples solutions.

**Partie B**

Un entier naturel  $n$  est appelé un nombre *puissant* lorsque, pour tout diviseur premier  $p$  de  $n$ ,  $p^2$  divise  $n$ .

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la **partie A**, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

2. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels.  
Montrer que l'entier naturel  $n = a^2 b^3$  est un nombre puissant.
3. Montrer que si  $(x ; y)$  est un couple solution de l'équation  $(E)$  définie dans la **partie A**, alors  $x^2 - 1$  et  $x^2$  sont des entiers consécutifs puissants.
4. Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.  
Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018.

## EXERCICE 4

[ France Métropolitaine 2018 ]

### Partie A:

1. Déterminons un couple solution  $(x ; y)$  avec  $x \in \mathbb{N}$  et  $y \in \mathbb{N}$ :

L'équation que doivent vérifier les entiers naturels  $x$  et  $y$  est:  $x^2 - 8y^2 = 1$  (E).

Un couple  $(x ; y)$  est:  $x = 1 \in \mathbb{N}$  et  $y = 0 \in \mathbb{N}$ .

Et nous avons bien:  $(1)^2 - 8(0)^2 = 1$ .

Au total, un couple d'entiers naturels solution de l'équation (E) est:

$$(x ; y) = (1 ; 0).$$

2. a. Démontrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le couple  $(x_n ; y_n)$  est solution de l'équation (E):

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel  $n$ :  $(x_n ; y_n)$  est solution de l'équation (E) ".

$$(\text{cad: } x_n^2 - 8y_n^2 = 1)$$

**Initialisation:** • Le couple  $(x_0 ; y_0) = (1 ; 0)$  est solution de l'équation (E)  
d'après la question précédente.

• Donc vrai au rang " 0 ".

**Hérédité:** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$

et montrons qu'alors:  $x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = 1$ .

**Supposons:**  $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$ , pour un entier naturel  $n$  fixé.

(1)

Nous savons que:  $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  **cad:**  $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 8y_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{cases}$ .

$$(1) \Rightarrow x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = (3x_n + 8y_n)^2 - 8(x_n + 3y_n)^2$$

$$\Rightarrow x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = 9x_n^2 + 64y_n^2 + 48x_ny_n - 8(x_n^2 + 9y_n^2 + 6x_ny_n)$$

$$\Rightarrow x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = x_n^2 - 8y_n^2$$

$$\Rightarrow x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = 1.$$

**Conclusion:** Pour tout entier naturel  $n$ , nous avons:  $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$ .

**2. b. Démontrons que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $x_{n+1} > x_n$ :**

Nous savons que, pour tout entier naturel  $n$ :

- $x_n > 0$ ,

- $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$ ,

- $y_n$  est un entier naturel et donc  $y_n \geq 0$ .

Dans ces conditions:  $x_{n+1} - x_n = 2x_n + 8y_n > 0$ , car:  $x_n > 0$  et  $y_n \geq 0$ .

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ :  $x_{n+1} > x_n$ .

Et donc, nous pouvons affirmer que la suite  $(x_n)$  est strictement croissante.

3. Dédisons-en que l'équation (E) admet une infinité de couples solutions:

Nous savons que pour tout entier naturel  $n$ :

- $x_{n+1} > x_n$ ,
- $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$ .

Ainsi, les termes de la suite  $(x_n)$  sont tous distincts et rangés par ordre croissant:  $x_{n+1} > x_n$ .

Et à chaque  $x_n > 0$ , correspondra un  $y_n \geq 0$  tel que:  $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$ .

Par conséquent: l'équation (E) admet une infinité de couples solutions.

## Partie B:

1. Vérifions qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants:

Un entier naturel " $n$ " est puissant lorsque, pour tout diviseur premier  $p$  de  $n$ ,  $p^2$  divise  $n$ .

Dans ces conditions les deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants sont: **8 et 9**.

En effet:

- pour 8:  $p = 2$  et donc  $p^2 = 4$ ,
- pour 9:  $p = 3$  et donc  $p^2 = 9$ .

Ainsi, les deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants sont: 8 et 9.

2. Montrons que l'entier naturel  $n = a^2 b^3$  est un nombre puissant:

$a$  et  $b$  sont deux entiers naturels et  $n = a^2 b^3$ .

Soit  $p$  un diviseur premier de  $n$ .

Dans ce cas, nous pouvons écrire:  $n = p \cdot k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

$$n = p \cdot k \Leftrightarrow a^2 b^3 = p \cdot k.$$

Donc  $p$  divise " $a$ " ou  $p$  divise " $b$ ".

Distinguons 2 cas:

•  $p$  divise " $a$ ":

Dans ce cas:  $a = p \cdot p_1$ ,  $p_1 \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \text{D'où: } n &= (p \cdot p_1)^2 \cdot b^3 \\ &= p^2 \cdot (p_1^2 \cdot b^3), \text{ avec: } p_1^2 \cdot b^3 \in \mathbb{N} \text{ (} p_1 \in \mathbb{N} \text{ et } b \in \mathbb{N} \text{)}. \end{aligned}$$

Donc ici:  $p$  divise  $n$  et  $p^2$  divise  $n$ .

Par conséquent,  $n$  est un nombre puissant.

•  $p$  divise " $b$ ":

Dans ce cas:  $b = p \cdot p_2$ ,  $p_2 \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \text{D'où: } n &= a^2 \cdot (p \cdot p_2)^3 \\ &= p^2 \cdot (a^2 \cdot p \cdot p_2^3), \text{ avec: } a^2 \cdot p \cdot p_2^3 \in \mathbb{N} \text{ (} a \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \text{ et } p_2 \in \mathbb{N} \text{)}. \end{aligned}$$

Donc ici:  $p$  divise  $n$  et  $p^2$  divise  $n$ .

Par conséquent,  $n$  est un nombre puissant.

**Au total:** l'entier naturel  $n = a^2 b^3$  est un nombre puissant.

### 3. Montrons que $x^2 - 1$ et $x^2$ sont des entiers consécutifs puissants:

En ce qui concerne  $x^2$ :

$x$  est un entier naturel strictement positif.

Soit  $p_1$  un diviseur de  $x$ .

Dans ce cas, nous pouvons écrire:  $x = p_1 \times k_1$ ,  $k_1 \in \mathbb{N}$ .

D'où:  $x^2 = p_1 \times (p_1 \times k_1)^2$ , avec:  $(p_1 \times k_1)^2 \in \mathbb{N}$ .

Et:  $x^2 = p_1^2 \times (k_1)^2$ , avec:  $k_1^2 \in \mathbb{N}$ .

Donc:  $p_1$  divise  $x^2$  et  $p_1^2$  divise  $x^2$ .

Par conséquent:  $x^2$  est un entier naturel puissant.

En ce qui concerne  $x^2 - 1$ :

$(x ; y)$  vérifie l'équation (E).

D'où:  $x^2 - 8y^2 = 1$  ou encore:  $x^2 - 1 = 8y^2 = 2 \times 2^2 \times y^2$ .

Comme  $y$  est un entier naturel,  $y^2$  est aussi un entier naturel.

D'où:  $x^2 - 1 = 2 \times (2^2 \times y^2)$ , avec:  $2^2 \times y^2 \in \mathbb{N}$ .

Et:  $x^2 - 1 = 2^2 \times (2 \times y^2)$ , avec:  $2 \times y^2 \in \mathbb{N}$ .

Donc:  $2$  divise  $x^2 - 1$  et  $2^2$  divise  $x^2 - 1$ .

Par conséquent:  $x^2 - 1$  est un entier naturel puissant.

Au total:  $x^2 - 1$  et  $x^2$  sont bien des entiers naturels consécutifs et ils sont puissants.



4. a. Montrons qu'il existe une infinité de couples de nombres consécutifs puissants:

D'après **Partie A, 3.** et **Partie B, 3.**, nous pouvons affirmer que:

" il existe une infinité d'entiers naturels (strictement positifs)  $x$  tels que  $x^2 - 1$  et  $x^2$  soient des entiers consécutifs puissants ".

**En d'autres termes:** il existe bien une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.

4. b. Déterminons deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018:

D'après **Partie B, 3.:** " si  $(x ; y)$  est un couple solution de l'équation (E), alors  $x^2 - 1$  et  $x^2$  sont des entiers consécutifs puissants ".

Nous allons, par tâtonnement, chercher un  $x$  qui vérifie (E) et est tel que:

$$x^2 - 1 > 2018.$$

Nous savons que pour tout entier naturel  $n$ , le couple  $(x_n ; y_n)$  ( $X_{n+1} = A \cdot X_n$ ) est solution de l'équation (E).

Dans ces conditions: •  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et:  $3^2 - 1 = 8 < 2018$

•  $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$  et:  $17^2 - 1 = 288 < 2018$

•  $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix}$  et:  $99^2 - 1 > 2018$ .

**En conclusion, les deux nombres consécutifs puissants demandés sont:**

$$x^2 - 1 = 99^2 - 1 = 9800 \text{ et } x^2 = 99^2 = 9801.$$