Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU VENDREDI 22 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire **Coefficient : 7**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

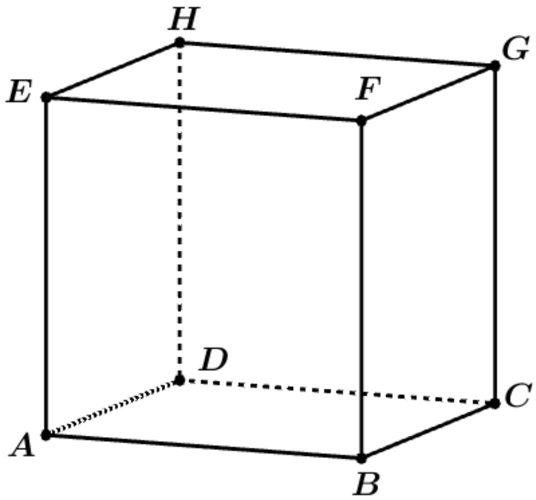
Exercice 3 (5 points) **Commun à tous les candidats**

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.

On rappelle que dans un tétraèdre $MNPQ$, la hauteur issue de M est la droite passant par M orthogonale au plan (NPQ).

Partie A Étude de cas particuliers

On considère un cube $ABCDEFGH$.



On admet que les droites $(AG), (BH), (CE)$ et (DF), appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre $ABCE$.

a. Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.

b. Les quatre hauteurs du tétraèdre $ABCE$ sont-elles concourantes ?

2. On considère le tétraèdre $ACHF$ et on travaille dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x - y + z = 0$.

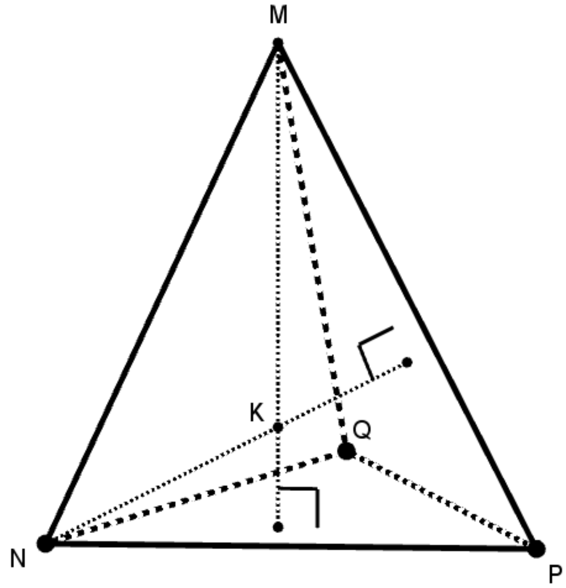
b. En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre $ACHF$.

c. Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre $ACHF$ issues respectivement des sommets A, C et H.
Les quatre hauteurs du tétraèdre $ACHF$ sont-elles concourantes ?

*Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un **tétraèdre orthocentrique**.*

Partie B Une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre $MNPQ$ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.



1. **a.** Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.

   b. Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.

2. Montrer que les arêtes $[MN]$ et $[PQ]$ sont orthogonales.

Ainsi, on obtient la propriété suivante :
Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.
(On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont « opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun.)

Partie C Application

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$R\,(-3\,;5\,;2)\ ,\ S(1\,;\,4\,;\,-2)\ ,\ T\,(4\,;\,-1\,;5)\ \text{ et }\ U\,(4\,;7\,;3).$$

Le tétraèdre $RSTU$ est-il orthocentrique ? Justifier.

EXERCICE 3

[France Métropolitaine 2018]

Partie A: Étude d'un cas particulier

1. a. Précisons la hauteur issue de E et la hauteur issue de C:

Nous sommes en présence du tétraèdre ABCE.

Or: • la droite (EA) est orthogonale au plan (ABC)

et: • la droite (CB) est orthogonale au plan (EAB).

Par conséquent: • la hauteur issue de E est **la droite (EA),**

• la hauteur issue de C est **la droite (CB)**.

1. b. Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE sont-elles concourantes ?

D'après l'énoncé: " **les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes ssi il existe un point d'intersection de ses quatre hauteurs** ".

Or ici: les droites (EA) et (CB) ne se croisent pas et sont donc non sécantes.

Ainsi: **non**, les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE ne sont pas concourantes.

2. a. Vérifions qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est $x - y + z = 0$:

Dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE})$, les coordonnées des points A, C et H sont:

• $A\,(0\,;\,0\,;\,0)$;

• $C\,(1;\,1;\,0)$ car: $\overrightarrow{AC} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AD}$;

• $H\,(0;\,1;\,1)$ car: $\overrightarrow{AH} = 1 \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AE}$.

Les points A, C et H sont distincts et pas alignés.

De plus: • $A \in (ACH)$ car: $0 - 0 + 0 = 0$,

• $C \in (ACH)$ car: $1 - 1 + 0 = 0$,

• $H \in (ACH)$ car: $0 - 1 + 1 = 0$.

D'où: $x - y + z = 0$ est bien une équation cartésienne du plan (ACH).

2. b. Déduisons-en que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF:

(FD) est la hauteur issue de F ssi (FD) est la droite passant par F orthogonale au plan (ACH).

La droite (FD) est orthogonale au plan (ACH) ssi: • $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

• $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$

Or: • $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, car: $F\,(1;\,0;\,1)$ et $D\,(0;\,1;\,0)$,

• $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

• $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions:

• $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ car $(-1 \times 1) + (1 \times 1) + ((-1) \times 0) = 0$,

• $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AH}$ car $(-1 \times 0) + (1 \times 1) + ((-1) \times 1) = 0$.

Au total: la droite (FD) est bien la hauteur issue de F car elle passe par F et est orthogonale au plan (ACH).

2. c. c1. Précisons les hauteurs du tétraèdre ACHF issues des sommets A, C et H:

Par analogie, nous pouvons affirmer que:

- la droite (AG) est la hauteur issue de A,
- la droite (CE) est la hauteur issue de C,
- la droite (HB) est la hauteur issue de H.

2. c. c2. Les quatre hauteurs sont-elles concourantes ?

Les quatre hauteurs du tétraèdre ACHF correspondent aux quatre grandes grandes diagonales du cube.

Donc **oui**, elles sont concourantes.

Partie B: Une propriété des tétraèdres orthocentriques

1. a. Justifions que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK):

D'après l'énoncé, la droite (MK) est orthogonale au plan (NPQ).

Donc elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan (NPQ).

Or la droite (PQ) appartient à ce plan.

D'où: la droite (PQ) et la droite (MK) sont orthogonales.

1. b. La droite (PQ) et le plan (MNK) ?

Nous pouvons en déduire que: la droite (PQ) est orthogonale au plan (MNK).

2. **Montrons que les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales**:

D'après la question précédente: **la droite (PQ) est orthogonale au plan (MNK)**.

Donc la droite (PQ) est orthogonale à toutes les droites de ce plan (MNK).

Or la droite (MN) appartient à ce plan.

D'où: la droite (MN) et la droite (PQ) sont orthogonales.

Et donc, les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales.

Partie C: Application

Le tétraèdre RSTU est-il orthocentrique ?

Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

Ici: R (-3; 5; 2), S (1; 4; -2), T (4; -1; 5) et U (4; 7; 3).

Nous allons prendre un **contre exemple** pour montrer que le tétraèdre RSTU n'est pas orthocentrique.

Soit les vecteurs: $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RU}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{RU}$ ne sont pas orthogonaux car:

$$(3 \times 7) + ((-5) \times 2) + (7 \times 1) = 18 \neq 0.$$

Donc les arêtes [ST] et [RU] ne sont pas orthogonales.

Ainsi, nous pouvons affirmer que: **non**, le tétraèdre RSTU n'est pas orthocentrique.