Corrigé

Exercice 4

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

ÉPREUVE DU MERCREDI 21 JUIN 2017

MATHÉMATIQUES

- Série S -

Enseignement Spécialité Coefficient : 9

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

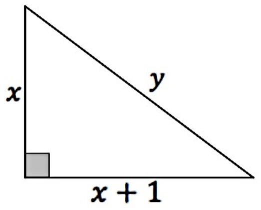
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

La page 7 est une annexe à rendre avec la copie.

Exercice 4 (5 points) : pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x+1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels.

Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle de côtés x, $x+1$ et y, où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPI, on dira que le couple $(x\,;y)$ définit un TRPI.

Partie A

1. Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x;y)$ définit un TRPI si et seulement si on a :

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple (3 ; 5).
3. **a.** Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.

   b. Montrer que dans un couple d'entiers $(x\,;y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.
4. Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x\,;y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie B

On note A la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice colonne : $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soient x et y deux entiers naturels ; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B\,.$$

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
2. **a.** Montrer que : $y'^2 - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1)$.

   b. En déduire que si le couple $(x\,;y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x';y')$ définit également un TRPI.
3. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'entiers naturels, définies par $x_0 = 3, y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n : $$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B.$$

   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;y_n)$ définit un TRPI.
4. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017.

EXERCICE 4

[France Métropolitaine 2017]

Partie A:

1. Démontrons que le couple d'entiers naturels (x ; y) définit un TRPI ssi $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$:

En utilisant la définition de l'énoncé et en appliquant le théorème de **Pythagore**, nous avons:

$$x^2 + (x+1)^2 = y^2 \iff x^2 + x^2 + 2x + 1 = y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 2x^2 + 2x + 1.$$

Au total, le couple d'entiers naturels (x ; y) définit un TRPI ssi:

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1.$$

2. Montrons que (3 ; 5) défini bien le TRPI ayant les plus petits côtés:

Ici:
- les côtés sont des entiers naturels non nuls,
- les côtés sont non nuls.

Donc nous devons déterminer le plus petit entier naturel non nul " x " tel que " y " soit aussi un entier naturel non nul avec: $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

Pour cela, nous allons faire du tâtonnement en commençant par $x = 1$.

- Si $x = 1$: $y = \sqrt{5} \notin \mathbb{N}^*$.

• Si $x = 2$: $y = \sqrt{13} \notin \mathbb{N}^*$.

• Si $x = 3$: $y = 5 \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, nous retiendrons le couple : $(3 ; 5)$.

Au total : le couple $(3 ; 5)$ défini bien le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls.

3. a. Montrons que si n^2 est impair alors n est impair :

Nous allons procéder à un raisonnement par l'absurde.

En effet, si nous montrons : n pair => n^2 pair,

on pourra alors affirmer : n^2 impair => n impair.

Si n est un entier naturel pair, nous pouvons alors l'écrire sous la forme :

$$n = 2p,\ p \in \mathbb{N}.$$

Dans ces conditions : n pair => $n = 2p,\ p \in \mathbb{N}$

=> $n \times n = 2p \times 2p,\ p \in \mathbb{N}$

=> $n^2 = 4p^2,\ p \in \mathbb{N}$

=> $n^2 = 2 \times p'$ avec $p' = 2p^2 \in \mathbb{N}$

=> n^2 est pair.

Au total : si n^2 est impair alors n est impair.

3. b. Montrons que y est nécessairement impair :

Nous savons que : • $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

• si n^2 est impair alors n est impair .

Or : $2x^2 + 2x = 2\,(x^2 + x)$ est pair car $x^2 + x \in \mathbb{N}^*$.

Par conséquent : $(2x^2 + 2x) + 1$ est impair ou plus exactement y^2 est impair.

Comme y^2 est impair, nous pouvons alors affirmer que y est nécessairement impair.

Au total : y est nécessairement impair.

4. **Montrons que si le couple d'entiers naturels $(x\,;y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux :**

Pour répondre à cette question, nous allons appliquer : le théorème de **BÉZOUT**.

D'après ce théorème : " Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont premiers entre eux ssi il existe deux entiers u et v tels que : $a \cdot u + b \cdot v = 1$ ".

Ici le couple d'entiers naturels $(x\,;y)$ définit un TRPI.

D'où nous avons : $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1 \iff y^2 - 2x^2 - 2x = 1$$

$$\iff y \times y + x \times (-2x - 2) = 1$$

$$\iff y \cdot u + x \cdot v = 1, \text{ avec : } \mathbf{u = y} \text{ et } \mathbf{v = -2x - 2}.$$

Comme x et y sont deux entiers naturels non nuls, nous pouvons affirmer qu'ils sont premiers entre eux car : il existe bien deux entiers u $(= y)$ et v $(= -2x - 2)$ tels que $y \cdot u + x \cdot v = 1$.

Au total : si le couple d'entiers naturels $(x\,;y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie B:

1. Exprimons x' et y' en fonction de x et y:

D'après l'énoncé: • $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$,

• $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$,

• $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D'où: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x + 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ => $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 1 \\ y' = 4x + 3y + 2 \end{cases}$.

Ainsi: $x' = 3x + 2y + 1$ et $y' = 4x + 3y + 2$.

2. a. Montrons l'égalité demandée:

Nous savons que: $x' = 3x + 2y + 1$ et $y' = 4x + 3y + 2$.

Dans ces conditions:

$$y'^2 - 2x'(x' + 1) = (4x + 3y + 2)^2 - 2(3x + 2y + 1)(3x + 2y + 2)$$

$$= y^2 - 2x(x + 1).$$

Ainsi, nous avons bien: $y'^2 - 2x'(x' + 1) = y^2 - 2x(x + 1)$.

2. b. Déduisons-en que si $(x ; y)$ définit un TRPI, alors $(x' ; y')$ définit également un TRPI:

Si $(x ; y)$ définit un TRPI: $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$ <=> $y^2 - 2x^2 - 2x = 1$

$$\Longleftrightarrow \; y^2 - 2x\,(x+1) = 1.$$

Or: $y^2 - 2x\,(x+1) = y'^2 - 2x'\,(x'+1)$, d'après la question précédente.

D'où: $y'^2 - 2x'\,(x'+1) = 1 \Longleftrightarrow y'^2 = 2x'^2 + 2x' + 1$ ce qui signifie que le couple $(x' ; y')$ définit également un TRPI.

Au total: $(x ; y)$ définit un TRPI $\Rightarrow$ $(x' ; y')$ définit un TRPI.

3. Montrons que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI:

Nous savons que:

- si le couple $(x ; y)$ définit un TRPI, **alors** le couple $(x' ; y')$ définit également un TRPI ;
- $x_0 = 3$ et $y_0 = 5$;
- $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2y_n + 1 \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n + 2 \end{cases}.$

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI ".

Initialisation: • $y_0^2 = 2x_0^2 + 2x_0 + 1$?

oui car: $y_0^2 = 25$ et $2x_0^2 + 2x_0 + 1 = 25$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI et montrons qu'alors: $(x_{n+1} ; y_{n+1})$ définit un TRPI.

Supposons: $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(1) => $(x_{n+1} ; y_{n+1})$ définit un TRPI car " si le couple $(x ; y)$ définit un TRPI **alors** le couple $(x' ; y')$ définit également un TRPI ", d'après la question précédente.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, le couple $(x_n ; y_n)$ définit bien un TRPI.

4. Déterminons un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017:

Nous avons: • $x_0 = 3$ et $y_0 = 5$;

• $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2y_n + 1 \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n + 2 \end{cases}$.

Pour $n = 3$ et $n = 4$, on trouve: • $x_3 = 696$ et $y_3 = 985$

• $x_4 = 4059$ et $y_4 = 5741$.

Au total, nous retiendrons: $x_4 = 4059 > 2017$, $y_4 = 5741 > 2017$ et nous avons bien $(4059)^2 + (4060)^2 = (5741)^2$.