Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

ÉPREUVE DU MERCREDI 21 JUIN 2017

MATHÉMATIQUES

- Série S -

Enseignement Spécialité **Coefficient : 9**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

La page 7 est une annexe à rendre avec la copie.

Exercice 2 (3 points) : **commun à tous les candidats**

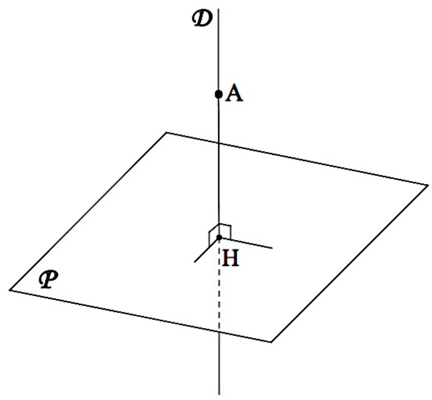
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $2x - z - 3 = 0$.
On note A le point de coordonnées $(1\,;a\,;a^2)$, où a est un nombre réel.

1. Justifier que, quelle que soit la valeur du réel a, le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ (de paramètre noté t) passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

b. Soit M un point appartenant à la droite $\mathcal{D}$, associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente.
Exprimer la distance AM en fonction du réel t.

On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par le point A. Le point H est appelé le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$, et la distance AH est appelée distance du point A au plan $\mathcal{P}$.



3. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $(1\,;a\,;a^2)$ au plan $\mathcal{P}$ est minimale ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

[France Métropolitaine 2017]

1. Justifions que $A \notin \mathcal{P}$, quelle que soit $a \in \mathbb{R}$:

D'après l'énoncé: • l'équation cartésienne du plan est: $2x - z - 3 = 0$,

• $A(1; a; a^2)$.

$A \in \mathcal{P}$ ssi: $2 \times (1) - (a^2) - 3 = 0$ cad ssi: $a^2 = -1$.

Or, pour tout " a " appartenant à $\mathbb{R}$: $a^2 \neq -1$.

Au total: comme, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \neq -1$, le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

2. a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$:

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite $\mathcal{D}$ passe par le point A $(1 ; a ; a^2)$,

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$ est: $\vec{u}\ (2 ; 0 ; -1)$,

• $\vec{n}\ (2 ; 0 ; -1)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

D'où, la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + 2.t \\ y = a + 0.t \\ z = a^2 + (-1).t \end{cases}, t \in IR.$$

Au total, la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = a \\ z = a^2 - t \end{cases}, t \in IR.$$

2. b. Exprimons la distance AM en fonction du réel t:

Nous avons: • A $(1 ; a ; a^2)$

• M $(1 + 2t ; a ; a^2 - t)$, $t \in IR$.

Dans ces conditions: $AM^2 = [\,(1 - 2t - 1)^2 + (a - a)^2 + (a^2 - t - a^2)^2\,]$

$\iff AM^2 = [\,4t^2 + t^2\,] \implies AM^2 = (\sqrt{5} \times t)^2, t \in IR.$

Au total, la distance AM est: $AM = \sqrt{5} \times |\,t\,|, t \in IR.$

3. Déterminons " a " telle que la distance AH soit minimale:

Nous savons que M $(1 + 2t ; a ; a^2 - t)$, $t \in IR$.

Le point H a pour coordonnées $(1 + 2t\,;\, a\,;\, a^2 - t)$, " t " étant tel que: $M \in \mathscr{P}$.

$$\underset{x_H}{1+2t} \quad \underset{y_H}{a} \quad \underset{z_H}{a^2-t}$$

Or: $M \in \mathscr{P}$ ssi les coordonnées de M vérifient l'équation: $2x - z - 3 = 0$ (1).

$$(1) \iff 2\underbrace{(1 + 2t)}_{x_H} - \underbrace{(a^2 - t)}_{z_H} - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{a^2 + 1}{5}.$$

Dans ces conditions: • $H\left(1 + 2\left(\frac{a^2 + 1}{5}\right); a; a^2 - \left(\frac{a^2 + 1}{5}\right)\right)$

• $AH = \sqrt{5} \times \left|\frac{a^2 + 1}{5}\right|$,

cad: • $H\left(\frac{7 + 2a^2}{5}; a; \frac{-1 + 4a^2}{5}\right)$

• $AH = \sqrt{5} \times \left(\frac{a^2 + 1}{5}\right)$, **car**: $\frac{a^2 + 1}{5} > 0$.

Ainsi, la distance AH est minimale quand " $\mathbf{a^2 + 1}$ " est minimum, cad quand:

$$a = 0.$$

Au total: **oui**, il existe une valeur de " a " $(\mathbf{a = 0})$ pour laquelle la distance AH est minimale et cette dernière est égale à $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Notons que les coordonnées du point H sont alors: $H\left(\frac{7}{5}; 0; -\frac{1}{5}\right)$.