

EXERCICE 4

[France Métropolitaine 2016]

1. Exprimons $\tan \alpha$ et $\tan \beta$ en fonction de x :

a. $\tan \alpha$:

D'après l'énoncé, $\tan \alpha = \tan(\widehat{ETA})$.

$$\text{Or: } \tan(\widehat{ETA}) = \frac{EA}{ET} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{25}{x}.$$

b. $\tan \beta$:

D'après l'énoncé, $\tan \beta = \tan(\widehat{ETB})$.

$$\begin{aligned} \text{Or: } \tan(\widehat{ETB}) &= \frac{EB}{ET} \\ &= \frac{EA + AB}{ET} \Rightarrow \tan \beta = \frac{30,6}{x}. \end{aligned}$$

$$\text{Au total: } \tan \alpha = \frac{25}{x} \text{ et } \tan \beta = \frac{30,6}{x}.$$

2. Montrons que la fonction \tan est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$\text{Ici: } \bullet f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\bullet Df =]0; \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{Posons: } f = \frac{f_1}{f_2}, \text{ avec: } f_1(x) = \sin x \text{ et } f_2(x) = \cos x.$$

$$f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont dérivables sur }]0; \frac{\pi}{2}[$$

Par conséquent, f est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ comme quotient $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, avec: pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $f_2(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

$$\text{Pour tout } x \in]0; \frac{\pi}{2}[: f'(x) = \frac{\cos x \times \cos x + \sin x \times \sin x}{(\cos x)^2}$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x = 1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Au total: pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

De plus comme sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, $\cos^2 x > 0$, nous pouvons dire que:
 $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante.

3. Montrons que $\tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$:

D'après la relation de Chasles sur les angles: $\widehat{ETA} + \widehat{ATB} = \widehat{ETB}$.

D'où: $\alpha + \gamma = \beta \Rightarrow \gamma = \beta - \alpha$.

Dans ces conditions: $\tan \gamma = \tan(\beta - \alpha)$

$$\left(\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b} \right) \quad = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \times \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \left(\frac{30,6}{x}\right) \left(\frac{25}{x}\right)}$$

$$= \frac{(30,6 - 25) \times x}{x^2 + (30,6)(25)}$$

$$\Rightarrow \tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$$

Au total, nous avons bien: $\tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$.

4. a. Montrons que γ maximal correspond à un minimum de f sur $]0;50]$:

γ est maximal quand $\tan \alpha$ est maximale, car la fonction \tan est strictement croissante sur $]0;50]$.

Donc γ est maximal quand $\frac{1}{\tan \gamma}$ minimale cad $\frac{1}{\frac{5,6x}{x^2 + 765}} = \frac{x^2 + 765}{5,6x}$.

Ou encore: $\left(x + \frac{765}{x}\right) \times \frac{1}{5,6}$ minimale.

Cela revient à dire que:

γ est maximal quand la fonction $f(x) = x + \frac{765}{x}$ est minimale.

4. b. Montrons qu'il existe une unique valeur de x telle que $\tan \gamma$ soit maximale et déterminons cette valeur de x :

• **Étape 1: calculons f' .**

Ici: • $f(x) = x + \frac{765}{x} = \frac{x^2 + 765}{x}$

• $Df =]0;50]$

Posons: $f = \frac{f_1}{f_2}$, avec: $f_1(x) = x^2 + 765$ et $f_2(x) = x$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $]0;50]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $]0;50]$ comme quotient $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0;50]$, avec: pour tout $x \in]0;50]$, $f_2(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0;50]$.

$$\text{Pour tout } x \in]0;50]: \quad f'(x) = \frac{(2x)(x) - (x^2 + 765) \times (1)}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2}.$$

• **Étape 2: déterminons le signe de f' .**

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $]0;50]$.

• **1^{er} cas:** $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \quad \text{ssi} \quad 1 - \frac{765}{x^2} = 0, \quad \text{cad:} \quad x = \sqrt{765}.$$

• **2^{eme} cas:** $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \quad \text{ssi} \quad 1 - \frac{765}{x^2} < 0, \quad \text{cad:} \quad x < \sqrt{765}.$$

• **3^{eme} cas:** $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \quad \text{ssi} \quad 1 - \frac{765}{x^2} > 0, \quad \text{cad:} \quad x > \sqrt{765}.$$

• **Étape 3: dressons le tableau de variation de f .**

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0	$\sqrt{765}$	50	
f'		-	0	+
f				

Avec: " m " correspond donc à la valeur minimale de f .

$$\begin{aligned} \text{Notons que: } m = f(\sqrt{765}) &\Rightarrow m = \frac{765 + 765}{\sqrt{765}} \\ &\Rightarrow m = 2\sqrt{765}. \end{aligned}$$

• **Étape 4: détermination de x .**

Comme nous l'avons dit: γ est maximal quand $\left(x \times \frac{765}{x}\right) \times \frac{1}{5,6}$ est minimale.

Or, $\left(x \times \frac{765}{x}\right) \times \frac{1}{5,6}$ est minimale quand: $x = \sqrt{765}$.

Et dans ce cas: $\tan \gamma = \frac{5,6}{f(\sqrt{765})}$

cad: $\tan \gamma = 0,10$, à 0,01 près.

En résumé:

- il existe une unique valeur de x par laquelle l'angle \widehat{ATB} est maximum et cette valeur de x est: $x_{\min} = \sqrt{765}$,
- l'angle \widehat{ATB} est alors maximum et égal à: $\tan \gamma = 0,10$.