EXERCICE 3

[France Métropolitaine 2016]

1. a. Montrons que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3:

Nous avons: $15x - 12y = 3(5x - 4y)$.

$5x - 4y$ est un entier relatif.

Par conséquent: nous pouvons affirmer que $15x - 12y$ est divisible par 3.

1. b. Déterminons en justifiant s'il existe au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs:

La droite Δ_1 a pour équation: $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$.

Soit $M(a, b)$, un point appartenant à Δ_1, avec: $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Dans ces conditions: $b = \frac{5}{4}a - \frac{2}{3} \iff 15a - 12b = 8$.

D'après la question précédente, $\mathbf{15a - 12b}$ est divisible par 3 ce qui revient à dire que $\mathbf{15a - 12b}$ est un multiple de 3.

Or: $15a - 12b = 8$ et 8 n'est pas un multiple de 3.

Par conséquent: il n'existe pas de point appartenant à Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. a. Démontrons que q divise le produit $n \times p$:

Soit $M_0(x_0, y_0)$, un point appartenant à Δ d'équation: $y = \frac{m}{n} \times x - \frac{p}{q}$ (E).

D'où: $y_0 = \frac{m}{n} \times x_0 - \frac{p}{q}$ <=> $q \times (mx_0 - ny_0) = n \times p$.

Or: x_0, y_0, m, n et le nombre $mx_0 - ny_0$ sont des entiers relatifs.

Par conséquent: nous pouvons affirmer que q divise $n \times p$.

2. b. Déduisons-en que " q " divise " n ":

Nous savons que:
- q divise $n \times p$,
- pgcd $(p, q) = 1$ cad p et q sont premiers entre eux.

Par conséquent, d'après **le théorème de GAUSS**: " q " divise " n ".

3. a. Démontrons qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $q \cdot r \cdot u - m \cdot v = 1$, avec $n = q \times r$:

D'après l'énoncé, les entiers relatifs m et n sont premiers entre eux.

En effet: pgcd $(m, n) = 1$.

Dans ces conditions, d'après **le théorème de BÉZOUT**: il existe deux entiers relatifs " c " et " d " avec: $n \times c + m \times d = 1$.

$n \times c + m \times d = 1$ <=> $q \times r \times c + m \times d = 1$ (1).

En posant, $u = c$ et $v = -d$, nous avons: (1) <=> $q \times r \times u - m \times v = 1$.

Au total: on peut trouver deux entiers relatifs u et v qui vérifient $q \times r \times u - m \times v = 1$, sachant que $n = q \times r$.

3. b. Déduisons-en qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs avec $y_0 = \frac{m}{n} \times x_0 - \frac{p}{q}$:

Nous savons que:
- $q \times r \times u - m \times v = 1$, (2)
- $n = q \times r$.

D'où: (2) $\Longleftrightarrow$ $n \times u - m \times v = 1$

$\Longleftrightarrow$ $(n \times u - m \times v) \times (r \times p) = 1 \times (r \times p)$

$\Longleftrightarrow$ $n \times u \times r \times p - m \times v \times r \times p = r \times p$

$\Longleftrightarrow$ $y_0 = \frac{m}{n} \times x_0 - \frac{p}{q}$, avec:
- $y_0 = -u \times r \times p$
- $x_0 = -v \times r \times p$
- $n = q \times r$.

Au total, il existe bien un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs qui vérifient $y_0 = \frac{m}{n} \times x_0 - \frac{p}{q}$: $x_0 = -v \times r \times p$ et $y_0 = -u \times r \times p$.

4. Déterminons en justifiant si la droite Δ possède un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs:

La droite Δ a pour équation: $y = \frac{3}{8} \times x - \frac{7}{4}$.

Dans ces conditions:
- $m = 3$, $n = 8$, $p = 7$ et $q = 4$
- pgcd $(m, n) =$ pgcd $(3, 8) = 1$
- pgcd $(p, q) =$ pgcd $(7, 4) = 1$
- $\frac{3}{8}$ et $\frac{7}{4}$ sont des fractions irréductibles.

Ainsi: Δ est une droite rationnelle.

De plus: $n = r \times q$ car $8 = 2 \times 4$ et donc " q " divise " n ".

Au total: la droite Δ possède donc un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

5. Déterminons ce que permet d'obtenir cet algorithme:

L'algorithme se termine.

Deux cas sont à distinguer pour cet algorithme:

- quand Q divise N, il affiche le point de la droite Δ à coordonnées entières dont la valeur absolue de l'abscisse est minimum.
- quand Q ne divise pas N, il affiche " Pas de solution ".

En conclusion, l'algorithme permet de valider si la droite Δ est rationnelle ou pas.