Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2016

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 20 JUIN 2016

Enseignement Spécialité ***Coefficient : 9***

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies

Exercice 3 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls (a,b), on note $\text{pgcd}(a,b)$ le plus grand diviseur commun de a et b.
Le plan est muni d'un repère $(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$.

- **a.** Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.
- **b.** Existe-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

Généralisation

On considère désormais une droite Δ d'équation (E) : $y = \frac{m}{n}x - \frac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(m,n) = \text{pgcd}(p,q) = 1$.

Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.

Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

- **a.** En remarquant que le nombre $n\,y_0 - m\,x_0$ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np.
- **b.** En déduire que q divise n.

3. Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

- **a.** On pose $n = qr$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru - mv = 1$.
- **b.** En déduire qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

4. Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{3}{8}x - \frac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier.

EXERCICE 3

[France Métropolitaine 2016]

1. a. Montrons que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3:

Nous avons: $15x - 12y = 3(5x - 4y)$.

$5x - 4y$ est un entier relatif.

Par conséquent: nous pouvons affirmer que $15x - 12y$ est divisible par 3.

1. b. Déterminons en justifiant s'il existe au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs:

La droite Δ_1 a pour équation: $y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{2}{3}$.

Soit $M(a, b)$, un point appartenant à Δ_1, avec: $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Dans ces conditions: $b = \dfrac{5}{4}a - \dfrac{2}{3} \iff 15a - 12b = 8$.

D'après la question précédente, $\mathbf{15a - 12b}$ est divisible par 3 ce qui revient à dire que $\mathbf{15a - 12b}$ est un multiple de 3.

Or: $15a - 12b = 8$ et 8 n'est pas un multiple de 3.

Par conséquent: il n'existe pas de point appartenant à Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. a. Démontrons que q divise le produit n x p:

Soit $M_0(x_0, y_0)$, un point appartenant à Δ d'équation: $y = \dfrac{m}{n} \times x - \dfrac{p}{q}$ (E).

D'où: $y_0 = \frac{m}{n} \times x_0 - \frac{p}{q} \iff q \times (mx_0 - ny_0) = n \times p$.

Or: x_0, y_0, m, n et le nombre $mx_0 - ny_0$ sont des entiers relatifs.

Par conséquent: nous pouvons affirmer que q divise $n \times p$.

2. b. Déduisons-en que " q " divise " n ":

Nous savons que:
- q divise $n \times p$,
- $\text{pgcd}(p, q) = 1$ cad p et q sont premiers entre eux.

Par conséquent, d'après **le théorème de GAUSS**: " q " divise " n ".

3. a. Démontrons qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $q \cdot r \cdot u - m \cdot v = 1$, avec $n = q \times r$:

D'après l'énoncé, les entiers relatifs m et n sont premiers entre eux.

En effet: $\text{pgcd}(m, n) = 1$.

Dans ces conditions, d'après **le théorème de BÉZOUT**: il existe deux entiers relatifs " c " et " d " avec: $n \times c + m \times d = 1$.

$n \times c + m \times d = 1 \iff q \times r \times c + m \times d = 1$ (1).

En posant, $u = c$ et $v = -d$, nous avons: (1) $\iff q \times r \times u - m \times v = 1$.

Au total: on peut trouver deux entiers relatifs u et v qui vérifient $q \times r \times u - m \times v = 1$, sachant que $n = q \times r$.

3. b. Déduisons-en qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs avec $y_0 = \frac{m}{n} \times x_0 - \frac{p}{q}$:

Nous savons que:
- $q \times r \times u - m \times v = 1$, (2)
- $n = q \times r$.

D'où: (2) $\Longleftrightarrow$ $n \times u - m \times v = 1$

$\Longleftrightarrow$ $(n \times u - m \times v) \times (r \times p) = 1 \times (r \times p)$

$\Longleftrightarrow$ $n \times u \times r \times p - m \times v \times r \times p = r \times p$

$\Longleftrightarrow$ $y_0 = \frac{m}{n} \times x_0 - \frac{p}{q}$, avec:
- $y_0 = -u \times r \times p$
- $x_0 = -v \times r \times p$
- $n = q \times r$.

Au total, il existe bien un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs qui vérifient $y_0 = \frac{m}{n} \times x_0 - \frac{p}{q}$: $x_0 = -v \times r \times p$ et $y_0 = -u \times r \times p$.

4. Déterminons en justifiant si la droite Δ possède un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs:

La droite Δ a pour équation: $y = \frac{3}{8} \times x - \frac{7}{4}$.

Dans ces conditions:
- $m = 3$, $n = 8$, $p = 7$ et $q = 4$
- pgcd (m, n) = pgcd $(3, 8) = 1$
- pgcd (p, q) = pgcd $(7, 4) = 1$
- $\frac{3}{8}$ et $\frac{7}{4}$ sont des fractions irréductibles.

Ainsi: Δ est une droite rationnelle.

De plus: $n = r \times q$ car $8 = 2 \times 4$ et donc " q " divise " n ".

Au total: la droite Δ possède donc un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

5. Déterminons ce que permet d'obtenir cet algorithme:

L'algorithme se termine.

Deux cas sont à distinguer pour cet algorithme:

- quand Q divise N, il affiche le point de la droite Δ à coordonnées entières dont la valeur absolue de l'abscisse est minimum.
- quand Q ne divise pas N, il affiche " Pas de solution ".

En conclusion, l'algorithme permet de valider si la droite Δ est rationnelle ou pas.