EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2016]

Partie A: Le composant électronique

1. Montrons que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0.89$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- A = " le composant provient de la chaîne A ".
- B = " le composant provient de la chaîne B ".
- S = " le composant est sans défaut ".

- $P(A) = 40\%$
- $P(B) = 60\%$

  ($40\% + 60\% = 1$).

- $P_A(\overline{S}) = 20\%$
- $P_A(S) = 80\%$

  ($20\% + 80\% = 1$).

- $P_B(\overline{S}) = 5\%$
- $P_B(S) = 95\%$

  ($5\% + 95\% = 1$).

Nous devons ainsi calculer: $P(S)$.

Or, l'évènement $S = (S \cap A) \cup (S \cap B)$.

D'où: $P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap B)$

$= P_A(S) \times P(A) + P_B(S) \times P(B)$.

Ainsi: $P(S) = 80\% \times 40\% + 95\% \times 60\%$ => $P(S) = 89\%$.

Au total, il y a 89% de chance pour que le composant électronique soit sans défaut.

2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminons la probabilité qu'il provienne de la chaîne A:

Cela revient à calculer: $P_S(A)$.

$$P_S(A) = \frac{P(S \cap A)}{P(S)}$$

$$= \frac{P_A(S) \times P(A)}{P(S)}.$$

Ainsi: $P_S(A) = \dfrac{80\% \times 40\%}{89\%}$ => $P_S(A) \approx 35.95\%$.

Au total, sachant que le composant ne présente pas de défaut, la probabilité qu'il provienne de la chaîne A, à 10^{-2} près, est de: 36%.

Partie B: Intervalle de confiance

1. Déterminons un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95%:

Ici, nous avons: • $n = 400$

• $f = 0,92$ => $f = 92\%$.

Dans ces conditions:

$n = 400 \geqslant 30$, $n.f = 368 \geqslant 5$ et $n.(1 - f) = 32 \geqslant 5$.

Les conditions étant réunies, un intervalle de confiance à 95% de la proportion de composants sans défaut s'écrit:

$$I = [f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}], \quad \text{cad:} \quad I = [0,92 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,92 + \frac{1}{\sqrt{n}}].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [0,87 ; 0,97]$.

2. Déterminons la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance à 95% ait une amplitude maximale de 0, 02:

Nous savons que: $I = [0,92 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,92 + \frac{1}{\sqrt{n}}]$

cad: $I =$ [Borne inférieure ; Borne supérieure].

La longueur ou amplitude de l'intervalle I est:

$L =$ Borne supérieure - Borne inférieure => $L = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

On cherche donc n tel que: $L \leqslant 0,02$.

$L \leqslant 0,02 \iff \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,02 \Rightarrow n \geqslant 10000$.

Au total, la valeur minimale de n est: 10000 composants sans défaut.

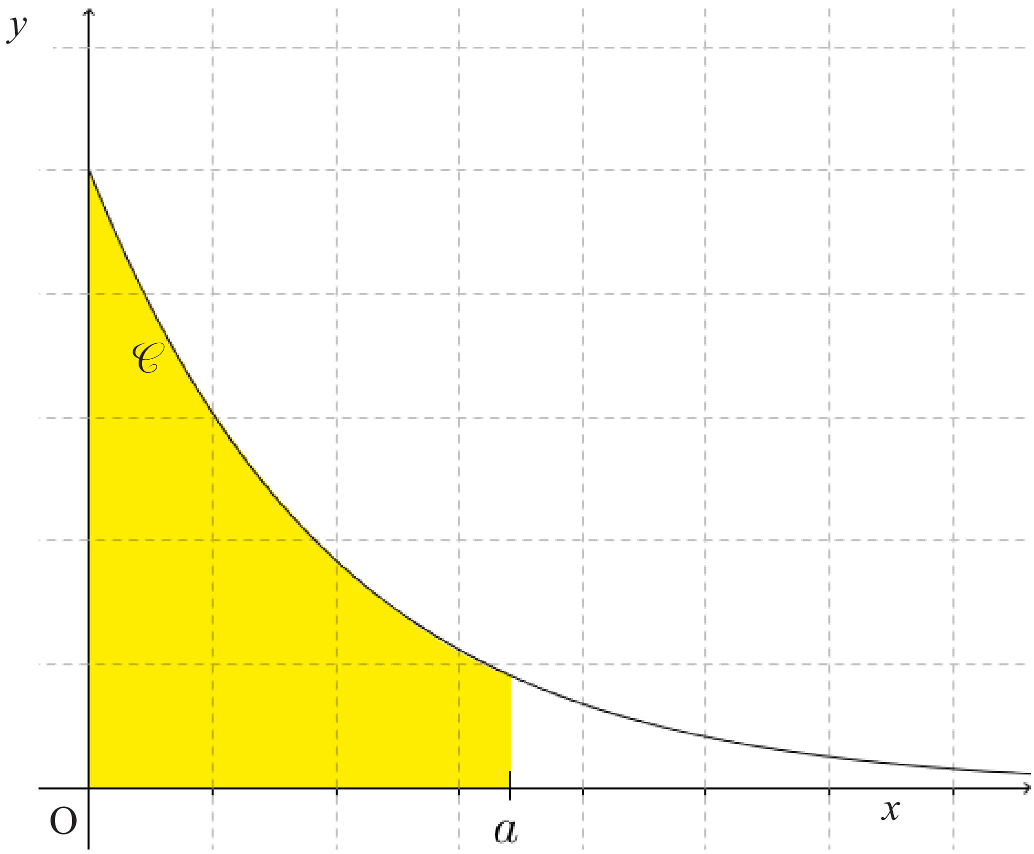
EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2016]

Partie C: Durée de vie

1. a. Interprétons graphiquement $P(T \leqslant a)$:

$P(T \leqslant a)$ correspond à l'aire (en jaune), en unités d'aire, du graphique suivant:



1. b. Montrons que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = ?$

Dans ces conditions:

- $f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$, $\forall\, t \in [0, +\infty[$.
- $P\,(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a f(t)\, dt$.
- $E\,(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Il s'agit de calculer: $P\,(T \leqslant t)$.

$$P\,(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \lambda \left[- \frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda t} \right]_0^t$$

$$= [\, - e^{-\lambda t}\,]_0^t$$

$$\Rightarrow \quad P\,(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Au total, nous avons bien: $P\,(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

1. c. Montrons que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} P\,(T \leqslant t) = 1$:

$$\lim_{t \to +\infty} P\,(T \leqslant t) = \lim_{t \to +\infty} 1 - e^{-\lambda t}$$

$$= 1 - \lim_{t \to +\infty} e^{-\lambda t}.$$

Or: $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$, d'après le cours.

D'où: $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} P\,(T \leqslant t) = 1$.

Au total, nous avons bien: $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} P\,(T \leqslant t) = 1$.

2. Déterminons λ sachant que $P(T \leqslant 7) = 0,5$:

$P(T \leqslant 7) = 0,5 \iff 1 - e^{-7 \times \lambda} = 0,5$

$\iff e^{-7 \times \lambda} = 0,5$

$\iff -7 \times \lambda = -\ln(2)$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{\ln(2)}{7}$ ou $\lambda \approx 0,099$.

Au total, la valeur de λ est: $\lambda \approx 0,099$.

3. a. Déterminons la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans:

Il s'agit de calculer: $P(T \geqslant 5)$.

$P(T \geqslant 5) = 1 - P(T \leqslant 5)$

$= 1 - (1 - e^{-5 \times \lambda})$

$= e^{-5 \times 0,099}$

$\Rightarrow P(T \geqslant 5) \approx 0,61$.

Au total, la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans est de: 61%.

3. b. Déterminons la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans:

Il s'agit de calculer: $P_{(T \geqslant 2)}(T \geqslant 7)$.

$P_{(T \geqslant 2)}(T \geqslant 7) = P(T \geqslant 5)$, car la loi exponentielle est la loi de durée sans vieillissement.

Ainsi: $P_{(T \geqslant 2)}(T \geqslant 7) \approx 61\%$.

Au total, la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans est de: 61%.

3\. c. Donnons et interprétons E (T) :

$$E(T) = \int_0^{+\infty} t \,.\, f(t)\, dt$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t \times (\lambda\, e^{-\lambda t})\, dt$$

$$= \frac{1}{\lambda}, \text{ d'après le cours.}$$

Comme $\lambda \approx 0,099$, $E(T) \approx 10,10$ ans.

Au total, nous avons : $E(T) \approx 10$ ans.

Cela signifie que la durée de vie moyenne d'un composant est d'environ 10 ans.