Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2016

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 20 JUIN 2016

Enseignement Obligatoire ***Coefficient : 7***

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

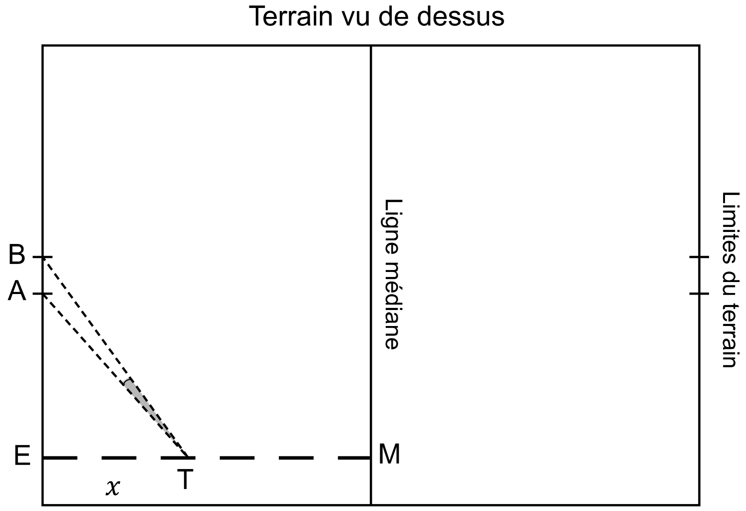
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies

Exercice 4 (5 points) Commun à tous les candidats



Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment $[AB]$.

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50$ m, $EA = 25$ m et $AB = 5{,}6$ m. On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.

Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5{,}6x}{x^2 + 765}$.

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\,;\,50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

Remarque : sur un terrain, un joueur de rugby ne se soucie pas d'une telle précision.

EXERCICE 4

[France Métropolitaine 2016]

1. Exprimons $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x:

a. $\tan\alpha$:

D'après l'énoncé, $\tan\alpha = \tan(\widehat{ETA})$.

Or: $\tan(\widehat{ETA}) = \dfrac{EA}{ET}$ => $\tan\alpha = \dfrac{25}{x}$.

b. $\tan\beta$:

D'après l'énoncé, $\tan\beta = \tan(\widehat{ETB})$.

Or: $\tan(\widehat{ETB}) = \dfrac{EB}{ET}$

$= \dfrac{EA + AB}{ET}$ => $\tan\beta = \dfrac{30,6}{x}$.

Au total: $\tan\alpha = \dfrac{25}{x}$ et $\tan\beta = \dfrac{30,6}{x}$.

2. Montrons que la fonction tan est strictement croissante sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$:

Ici: • $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

• $Df = \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Posons: $f = \dfrac{f_1}{f_2}$, avec: $f_1(x) = \sin x$ et $f_2(x) = \cos x$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Par conséquent, f est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, avec: pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $f_2(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$: $f'(x) = \dfrac{\cos x \times \cos x + \sin x \times \sin x}{(\cos x)^2}$

$(\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Au total: pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

De plus comme sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos^2 x > 0$, nous pouvons dire que:

$f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante.

3. Montrons que $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2 + 765}$:

D'après la relation de Chasles sur les angles: $\widehat{ETA} + \widehat{ATB} = \widehat{ETB}$.

D'où: $\alpha + \gamma = \beta \Rightarrow \gamma = \beta - \alpha$.

Dans ces conditions: $\tan\gamma = \tan(\beta - \alpha)$

$\left(\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}\right)$ $= \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta \times \tan\alpha}$

$$= \frac{\dfrac{30,6}{x} - \dfrac{25}{x}}{1 + \left(\dfrac{30,6}{x}\right)\left(\dfrac{25}{x}\right)}$$

$$= \frac{(30,6 - 25) \times x}{x^2 + (30,6)(25)}$$

$$\Rightarrow \tan\gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}.$$

Au total, nous avons bien: $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2 + 765}.$

4. a. Montrons que γ maximal correspond à un minimum de f sur]0 ;50]:

γ est maximal quand $\tan\alpha$ est maximale, car la fonction tan est strictement croissante sur]0 ;50].

Donc γ est maximal quand $\dfrac{1}{\tan\gamma}$ minimale cad $\dfrac{1}{\frac{5,6x}{x^2+765}} = \dfrac{x^2 + 765}{5,6x}.$

Ou encore: $\left(x + \dfrac{765}{x}\right) \times \dfrac{1}{5,6}$ minimale.

Cela revient à dire que:

γ est maximal quand la fonction $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$ est minimale.

4. b. Montrons qu'il existe une unique valeur de x telle que $\tan\gamma$ soit maximale et déterminons cette valeur de x:

- **Étape 1: calculons f'.**

Ici: • $f(x) = x + \dfrac{765}{x} = \dfrac{x^2 + 765}{x}$

• $Df =]0 ;50]$.

Posons: $f = \dfrac{f_1}{f_2}$, avec: $f_1(x) = x^2 + 765$ et $f_2(x) = x$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur IR comme fonctions polynômes, donc dérivables sur]0 ;50].

Par conséquent, f est dérivable sur]0;50] comme quotient $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur]0;50], avec: pour tout $x \in]0;50]$, $f_2(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0;50]$.

Pour tout $x \in]0;50]$: $f'(x) = \dfrac{(2x)(x) - (x^2 + 765) \times (1)}{x^2}$

$$\Rightarrow \; f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2}.$$

• **Étape 2**: **déterminons le signe de f'.**

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de]0;50].

• **1[er] cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $1 - \dfrac{765}{x^2} = 0$, cad: $x = \sqrt{765}$.

• **2[eme] cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $1 - \dfrac{765}{x^2} < 0$, cad: $x < \sqrt{765}$.

• **3[eme] cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $1 - \dfrac{765}{x^2} > 0$, cad: $x > \sqrt{765}$.

• **Étape 3**: **dressons le tableau de variation de f.**

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0		$\sqrt{765}$		50
f'	||	$-$	0	$+$	
f	||	↘	m	↗	

Avec: " m " correspond donc à la valeur minimale de f.

Notons que: $m = f(\sqrt{765}) \Rightarrow m = \dfrac{765 + 765}{\sqrt{765}}$

$\Rightarrow m = 2\sqrt{765}$.

• **Étape 4: détermination de x.**

Comme nous l'avons dit: γ est maximal quand $\left(x \times \dfrac{765}{x}\right) \times \dfrac{1}{5,6}$ est minimale.

Or, $\left(x \times \dfrac{765}{x}\right) \times \dfrac{1}{5,6}$ est minimale quand: $x = \sqrt{765}$.

Et dans ce cas: $\tan\gamma = \dfrac{5,6}{f(\sqrt{765})}$

cad: $\tan\gamma = 0,10$, à $0,01$ près.

En résumé: • il existe une unique valeur de x par laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et cette valeur de x est: $x_{min} = \sqrt{765}$,

• l'angle $\widehat{ATB}$ est alors maximum et égal à: $\tan\gamma = 0,10$.