EXERCICE 3

[France Métropolitaine 2016]

Partie A:

1. Résolvons dans IR, l'équation $f(x) = x$:

Sur IR, f est définie par: $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

Dans ces conditions: $f(x) = x \iff x - \ln(x^2 + 1) = x$

$\iff \ln(x^2 + 1) = 0$

$\iff x^2 + 1 = e^0$

$\iff x^2 + 1 = 1$

$\iff x^2 = 0$

$\Rightarrow x = 0$.

La solution dans IR, de l'équation $f(x) = x$, est: $x = 0$.

2. Justifions tous les éléments du tableau:

a. Montrons que f est croissante sur IR:

Pour cela nous devons calculer la dérivée de f sur IR.

Posons: $f = g_1 - \ln(g_2)$,

avec: $\forall\ x \in IR$, $g_1(x) = x$ et $g_2(x) = x^2 + 1$.

Les fonctions g_1 et g_2 sont dérivables sur IR comme fonctions polynômes.

De plus, sur IR: $g_2(x) > 0$.

Donc la fonction " $-\ln(g_2)$ " est dérivable sur IR, comme composée.

Enfin, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $g_1 + -\ln(g_2)$.

Dans ces conditions, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et nous pouvons calculer f' sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

Au total: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

Distinguons 2 cas:

- $f'(x) = 0$ ssi: $x = 1$.
- $f'(x) > 0$ ssi: $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$?

Nous avons:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ (1)
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} -\ln(x^2 + 1) = -\infty$. (2)

Ainsi, nous pouvons affirmer que: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. (1) + (2)

3. Montrons que pour tout réel x de $[0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;1]$:

D'après la question 2., nous savons que f est croissante.

Ainsi, nous pouvons écrire:

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1).$$

Or: $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(2)$.

D'où: $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 - \ln(2)$

cad: $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. (car $1 - \ln(2) < 1$)

Au total: pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

4. a. Que fait cet algorithme ?

Cet algorithme indique la plus petite valeur de N pour laquelle $N - \ln(N^2 + 1)$ est supérieur ou égal à N.

4. b. Déterminons la valeur de N si A = 100:

Lorsque la valeur saisie pour A est 100, l'algorithme fourni comme valeur de N: $N = 110$.

Au total: $N = 110$.

Partie B:

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $U_n \in [0\,;1]$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- $n \in \mathbb{N}$
- $U_0 = 1$
- $U_{n+1} = U_n - \ln(U_n^2 + 1)$.

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 \leqslant U_n \leqslant 1$ ".
($U_n \in [0\,;1]$)

Initialisation: • $0 \leqslant U_0 = 1 \leqslant 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $0 \leqslant U_1 \leqslant 1$?

$U_1 = U_0 - \ln(U_0^2 + 1) \Rightarrow U_1 = 1 - \ln(2)$.

Comme $0 \leqslant 1 - \ln(2) \leqslant 1$, vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $0 \leqslant U_n \leqslant 1$

et montrons qu'alors: $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$.

Supposons: $0 \leqslant U_n \leqslant 1$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{N}$, nous pouvons écrire:

$$(1) \Rightarrow f(0) \leqslant f(U_n) \leqslant f(1)$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant 1 - \ln(2)$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant 1.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons:

$0 \leqslant U_n \leqslant 1$ cad: $U_n \in [0 ; 1]$.

2. Etudions les variations de la suite (U_n):

Nous devons ici déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$.

$U_{n+1} - U_n = U_n - \ln(U_n^2 + 1) - U_n \iff U_{n+1} - U_n = -\ln(U_n^2 + 1)$.

Or, nous savons que: $0 \leqslant U_n \leqslant 1 \iff 0 \leqslant U_n^2 \leqslant 1$

$$\iff 1 \leqslant U_n^2 + 1 \leqslant 2$$

$$\iff \ln(1) \leqslant \ln(U_n^2 + 1) \leqslant \ln(2)$$

$$\iff 0 \leqslant \ln(U_n^2 + 1) \leqslant \ln(2).$$

Donc: $\ln(U_n^2 + 1) \geqslant 0 \Rightarrow -\ln(U_n^2 + 1) \leqslant 0.$

Ainsi, nous pouvons affirmer que pour tout entier naturel n: $U_{n+1} - U_n \leqslant 0.$

En conclusion, la suite (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

3. Montrons que la suite (U_n) est convergente:

Nous savons que:

- $0 \leqslant U_n \leqslant 1.$

  Donc (U_n) est minorée par $m = 0.$

- $U_{n+1} - U_n \leqslant 0.$

  Donc (U_n) est décroissante.

Dans ces conditions, (U_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente.

4. Déduisons-en la valeur de L:

Soit " L " la limite de la suite (U_n).

" L " est unique et est telle que: $f(L) = L$.

$f(L) = L \iff L = L - \ln(L^2 + 1)$

$\Rightarrow L = 0$ (voir Partie A, question 1.).

Au total, la valeur de L est: $L = 0.$