Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2016

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 20 JUIN 2016

Enseignement Obligatoire ***Coefficient : 7***

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies

Exercice 3 (5 points) Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right)$.

1. Résoudre dans **R** l'équation : $f(x) = x$.

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$				$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;1]$.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln\left(N^2 + 1\right) < A$ N prend la valeur $N+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

a. Que fait cet algorithme ?

b. Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;1]$.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE 3

[France Métropolitaine 2016]

Partie A:

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$:

Sur $\mathbb{R}$, f est définie par: $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

Dans ces conditions: $f(x) = x \iff x - \ln(x^2 + 1) = x$

$\iff \ln(x^2 + 1) = 0$

$\iff x^2 + 1 = e^0$

$\iff x^2 + 1 = 1$

$\iff x^2 = 0$

$\Rightarrow x = 0$.

La solution dans $\mathbb{R}$, de l'équation $f(x) = x$, est: $x = 0$.

2. Justifions tous les éléments du tableau:

a. Montrons que f est croissante sur $\mathbb{R}$:

Pour cela nous devons calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

Posons: $f = g_1 - \ln(g_2)$,

avec: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g_1(x) = x$ et $g_2(x) = x^2 + 1$.

Les fonctions g_1 et g_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes.

De plus, sur $\mathbb{R}$: $g_2(x) > 0$.

Donc la fonction " $-\ln(g_2)$ " est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme composée.

Enfin, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $g_1 + -\ln(g_2)$.

Dans ces conditions, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et nous pouvons calculer f' sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

Au total: $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

Distinguons 2 cas:

- $f'(x) = 0$ ssi: $x = 1$.
- $f'(x) > 0$ ssi: $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$?

Nous avons:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ (1)
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} -\ln(x^2 + 1) = -\infty$. (2)

Ainsi, nous pouvons affirmer que: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. (1) + (2)

3. Montrons que pour tout réel x de $[0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;1]$:

D'après la question 2., nous savons que f est croissante.

Ainsi, nous pouvons écrire:

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1).$$

Or: $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(2)$.

D'où: $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 - \ln(2)$

cad: $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$ (car $1 - \ln(2) < 1$)

Au total: pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

4. a. Que fait cet algorithme ?

Cet algorithme indique la plus petite valeur de N pour laquelle $N - \ln(N^2 + 1)$ est supérieur ou égal à N.

4. b. Déterminons la valeur de N si A = 100:

Lorsque la valeur saisie pour A est 100, l'algorithme fourni comme valeur de N: $N = 110$.

Au total: $N = 110$.

Partie B:

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $U_n \in [0\,;1]$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- $n \in \mathbb{N}$
- $U_0 = 1$
- $U_{n+1} = U_n - \ln(U_n^2 + 1)$.

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 \leqslant U_n \leqslant 1$ ".

$(U_n \in [0\,;1])$

Initialisation: • $0 \leqslant U_0 = 1 \leqslant 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $0 \leqslant U_1 \leqslant 1$?

$U_1 = U_0 - \ln(U_0^2 + 1) \Rightarrow U_1 = 1 - \ln(2)$.

Comme $0 \leqslant 1 - \ln(2) \leqslant 1$, vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $0 \leqslant U_n \leqslant 1$

et montrons qu'alors: $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$.

Supposons: $\underset{(1)}{0 \leqslant U_n \leqslant 1}$, pour un entier naturel n fixé.

Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{N}$, nous pouvons écrire:

$$(1) \Rightarrow f(0) \leqslant f(U_n) \leqslant f(1)$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant 1 - \ln(2)$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant 1.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons:

$0 \leqslant U_n \leqslant 1$ cad: $U_n \in [0\,;1]$.

2. Etudions les variations de la suite (U_n):

Nous devons ici déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$.

$U_{n+1} - U_n = U_n - \ln(U_n^2 + 1) - U_n \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = -\ln(U_n^2 + 1)$.

Or, nous savons que: $0 \leqslant U_n \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant U_n^2 \leqslant 1$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant U_n^2 + 1 \leqslant 2$

$\Leftrightarrow \ln(1) \leqslant \ln(U_n^2 + 1) \leqslant \ln(2)$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant \ln(U_n^2 + 1) \leqslant \ln(2)$.

Donc: $\ln(U_n^2 + 1) \geqslant 0 \Rightarrow -\ln(U_n^2 + 1) \leqslant 0$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que pour tout entier naturel n: $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.

En conclusion, la suite (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

3. Montrons que la suite (U_n) est convergente:

Nous savons que:

- $0 \leqslant U_n \leqslant 1$.

  Donc (U_n) est minorée par $m = 0$.

- $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.

  Donc (U_n) est décroissante.

Dans ces conditions, (U_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente.

4. Déduisons-en la valeur de L:

Soit " L " la limite de la suite (U_n).

" L " est unique et est telle que: $f(L) = L$.

$f(L) = L \iff L = L - \ln(L^2 + 1)$

$\Rightarrow L = 0$ (voir Partie A, question 1.).

Au total, la valeur de L est: $L = 0$.