Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2016

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 20 JUIN 2016

Enseignement Obligatoire ***Coefficient : 7***

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies

Exercice 1 (6 points) Commun à tous les candidats

Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40% des composants et la chaîne B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20% des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5%.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
On note :

A l'événement « le composant provient de la chaîne A »
B l'événement « le composant provient de la chaîne B »
S l'événement « le composant est sans défaut »

1. Montrer que la probabilité de l'événement S est $\mathrm{P}(S) = 0,89$.

2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

Partie B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut.

Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A.
Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de 0,92.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de 0,02 ?

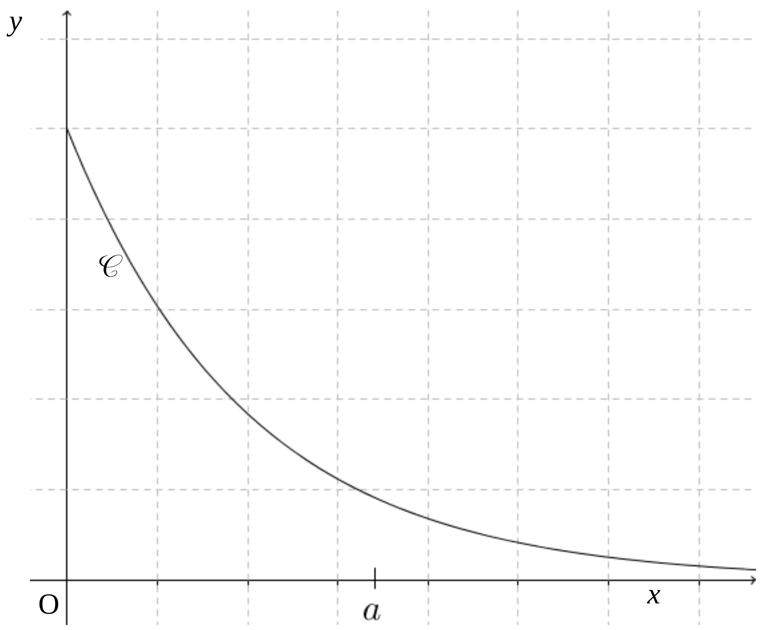
Partie C

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).

On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :

- pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- pour tout nombre réel $a \geq 0$, $\mathrm{P}(T \leq a) = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



a. Interpréter graphiquement $P(T \leq a)$ où $a > 0$.

b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geq 0$: $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

c. En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leq t) = 1$.

2. On suppose que $P(T \leq 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

c. Donner l'espérance mathématique $E(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
Interpréter ce résultat.

EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2016]

Partie A: Le composant électronique

1. Montrons que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0.89$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- A = " le composant provient de la chaîne A ".
- B = " le composant provient de la chaîne B ".
- S = " le composant est sans défaut ".

- $P(A) = 40\%$
- $P(B) = 60\%$

($40\% + 60\% = 1$).

- $P_A(\bar{S}) = 20\%$
- $P_A(S) = 80\%$

($20\% + 80\% = 1$).

- $P_B(\bar{S}) = 5\%$
- $P_B(S) = 95\%$

($5\% + 95\% = 1$).

Nous devons ainsi calculer: $P(S)$.

Or, l'évènement $S = (S \cap A) \cup (S \cap B)$.

D'où: $P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap B)$

$$= P_A(S) \times P(A) + P_B(S) \times P(B).$$

Ainsi: $P(S) = 80\% \times 40\% + 95\% \times 60\%$ => $P(S) = 89\%$.

Au total, il y a 89% de chance pour que le composant électronique soit sans défaut.

2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminons la probabilité qu'il provienne de la chaîne A:

Cela revient à calculer: $P_S(A)$.

$$P_S(A) = \frac{P(S \cap A)}{P(S)}$$

$$= \frac{P_A(S) \times P(A)}{P(S)}.$$

Ainsi: $P_S(A) = \dfrac{80\% \times 40\%}{89\%}$ => $P_S(A) \approx 35.95\%$.

Au total, sachant que le composant ne présente pas de défaut, la probabilité qu'il provienne de la chaîne A, à 10^{-2} près, est de: 36%.

freemaths.fr

Partie B: Intervalle de confiance

1. Déterminons un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95%:

Ici, nous avons: • $n = 400$

• $f = 0,92$ => $f = 92\%$.

Dans ces conditions:

$n = 400 \geq 30$, $n.f = 368 \geq 5$ et $n.(1 - f) = 32 \geq 5$.

Les conditions étant réunies, un intervalle de confiance à 95% de la proportion de composants sans défaut s'écrit:

$$I = [f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}], \quad \text{cad:} \quad I = [0,92 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,92 + \frac{1}{\sqrt{n}}].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [0,87 ; 0,97]$.

2. Déterminons la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance à 95% ait une amplitude maximale de 0, 02:

Nous savons que: $I = [0,92 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,92 + \frac{1}{\sqrt{n}}]$

cad: $I = [$Borne inférieure ; Borne supérieure$]$.

La longueur ou amplitude de l'intervalle I est:

$L =$ Borne supérieure - Borne inférieure => $L = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

On cherche donc n tel que: $L \leq 0,02$.

$L \leq 0,02 \iff \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,02 \implies n \geq 10000$.

Au total, la valeur minimale de n est: 10000 composants sans défaut.

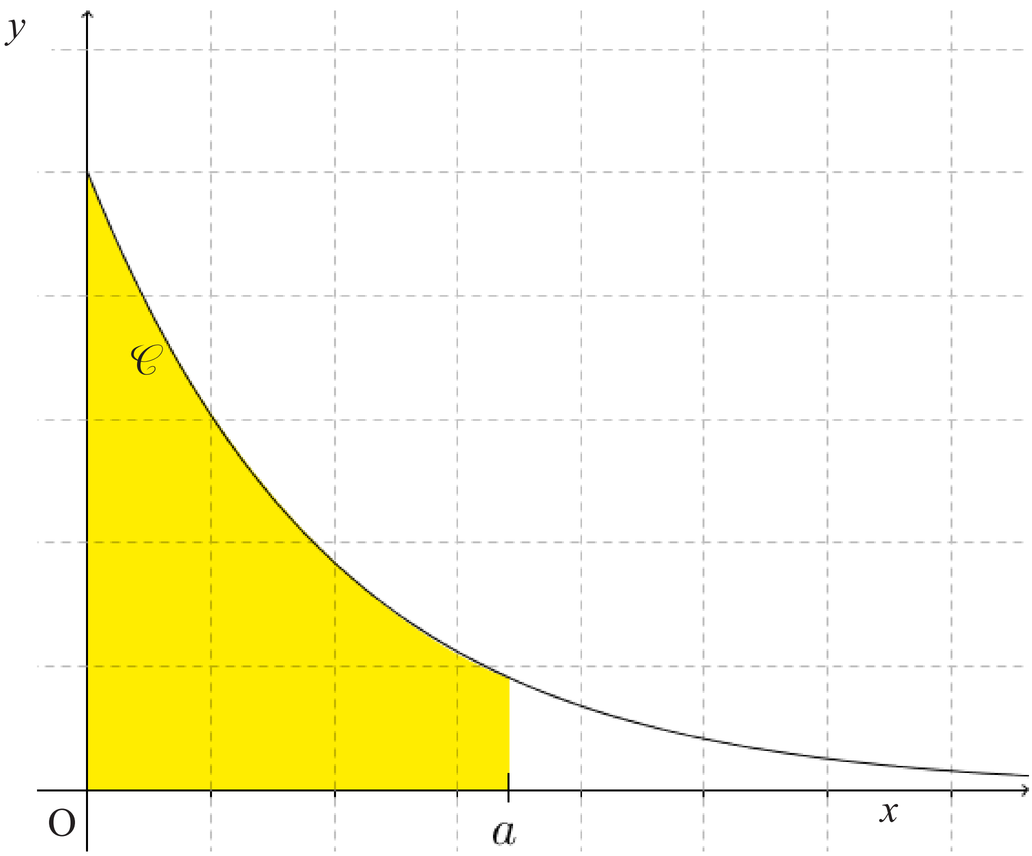
EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2016]

Partie C: Durée de vie

1. a. Interprétons graphiquement $P(T \leqslant a)$:

$P(T \leqslant a)$ correspond à l'aire (en jaune), en unités d'aire, du graphique suivant:



1. b. Montrons que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = ?$

Dans ces conditions:

- $f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$, $\forall\, t \in [0, +\infty[$.
- $P\,(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a f(t)\, dt$.
- $E\,(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Il s'agit de calculer: $P\,(T \leqslant t)$.

$$P\,(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda t} \right]_0^t$$

$$= [\, -e^{-\lambda t}\,]_0^t$$

$$\Rightarrow \quad P\,(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Au total, nous avons bien: $P\,(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

1. c. Montrons que $\lim\limits_{t \to +\infty} P\,(T \leqslant t) = 1$:

$$\lim_{t \to +\infty} P\,(T \leqslant t) = \lim_{t \to +\infty} 1 - e^{-\lambda t}$$

$$= 1 - \lim_{t \to +\infty} e^{-\lambda t}.$$

Or: $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$, d'après le cours.

D'où: $\lim\limits_{t \to +\infty} P\,(T \leqslant t) = 1$.

Au total, nous avons bien: $\lim\limits_{t \to +\infty} P\,(T \leqslant t) = 1$.

2. Déterminons λ sachant que $P(T \leqslant 7) = 0,5$:

$$P(T \leqslant 7) = 0,5 \iff 1 - e^{-7 \times \lambda} = 0,5$$

$$\iff e^{-7 \times \lambda} = 0,5$$

$$\iff -7 \times \lambda = -\ln(2)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{7} \text{ ou } \lambda \approx 0,099.$$

Au total, la valeur de λ est: $\lambda \approx 0,099$.

3. a. Déterminons la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans:

Il s'agit de calculer: $P(T \geqslant 5)$.

$$P(T \geqslant 5) = 1 - P(T \leqslant 5)$$

$$= 1 - (1 - e^{-5 \times \lambda})$$

$$= e^{-5 \times 0,099}$$

$$\Rightarrow P(T \geqslant 5) \approx 0,61.$$

Au total, la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans est de: 61%.

3. b. Déterminons la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans:

Il s'agit de calculer: $P_{(T \geqslant 2)}(T \geqslant 7)$.

$P_{(T \geqslant 2)}(T \geqslant 7) = P(T \geqslant 5)$, car la loi exponentielle est la loi de durée sans vieillissement.

Ainsi: $P_{(T \geqslant 2)}(T \geqslant 7) \approx 61\%$.

Au total, la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans est de: 61%.

3. c. Donnons et interprétons E (T):

$$E(T) = \int_0^{+\infty} t \, . \, f(t) \, dt$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_0^{b} t \times (\lambda \, e^{-\lambda t}) \, dt$$

$$= \frac{1}{\lambda}, \text{ d'après le cours.}$$

Comme $\lambda \approx 0,099$, $E(T) \approx 10$, 10 ans.

Au total, nous avons: $E(T) \approx 10$ ans.

Cela signifie que la durée de vie moyenne d'un composant est d'environ 10 ans.