EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2015]

Partie 1: Loi exponentielle

1. a. Démontrons que $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Dans ces conditions:

- $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Il s'agit de calculer: $P(c \leqslant X \leqslant d)$.

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx$$

$$= \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_c^d$$

$$= \left[-e^{-\lambda x} \right]_c^d$$

$\Rightarrow$ $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

Au total, nous avons bien: $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

1. b. Déterminons une valeur de λ telle que $P(X > 20) = 0,05$:

$$P(X > 20) = 1 - P(X \leqslant 20)$$
$$= 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 20).$$

D'où: $P(X > 20) = 0,05 \iff P(0 \leqslant X \leqslant 20) = 0,95$

$$\iff e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda \times 20} = 0,95$$
$$\iff 1 - e^{-20\lambda} = 0,95$$
$$\Rightarrow \lambda \approx 0,15.$$

Au total, la valeur de λ est: $\lambda \approx 0,15$.

1. c. Calculons $E(X)$:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$
$$= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x \times (\lambda e^{-\lambda x})\, dx$$
$$= \frac{1}{\lambda}, \text{ d'après le cours.}$$

Comme $\lambda = 0,15$: $E(X) \approx 6,66$.

Au total, nous avons: $E(X) \approx 6,66$.

1. d. Calculons $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$:

$$P(10 \leqslant X \leqslant 20) = e^{-\lambda \times 10} - e^{-\lambda \times 20}$$
$$= e^{-1,5} - e^{-3}$$

$\Rightarrow \; P(10 \leqslant X \leqslant 20) \approx 0,173.$

Au total, la probabilité demandée est de: 17,3%.

1. e. Calculons $P(X > 18)$:

$P(X > 18) = 1 - P(X \leqslant 18)$

$= 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 18)$

$= 1 - (e^{0} - e^{-0,15 \times 18})$

$\Rightarrow \; P(X > 18) \approx 0,067.$

Au total, la probabilité demandée est de: 6,7%.

2. a. Calculons $P(20 \leqslant Y \leqslant 21)$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- Y suit la loi normale d'espérance $\mu = 16$ et d'écart type $\sigma = 1,95$.

Il s'agit de calculer: $P(20 \leqslant Y \leqslant 21)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(20 \leqslant Y \leqslant 21) \approx 0,015.$

Au total, la probabilité demandée est de: 1,5%.

2. b. Calculons $P((Y < 11) \cup (Y > 21))$:

Il s'agit de calculer: $P((Y < 11) \cup (Y > 21))$.

$P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leqslant Y \leqslant 21).$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P\left((Y < 11) \cup (Y > 21)\right) \approx 0,01.$$

Au total, la probabilité demandée est de: 1%.

EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2015]

Partie 2: Verte ou Rouge ?

1. Calculons la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur ≥ 30 € sachant qu'il est rouge:

D'après l'énoncé, nous avons:

- V = " le bon est de couleur verte ".
- R = " le bon est de couleur rouge ".

- $P(V) = 75\%$
- $P(R) = 25\%$

  $(75\% + 25\% = 1)$.

- $P_V(30) = 0.067$.

- $P_R(30) = 0.015$
- $P_R(100) = 0.010$.

Soit " P ", la probabilité demandée: $P = P_R(30) + P_R(100)$

$\Rightarrow P = 2.5\%$.

Au total, la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur ≥ 30 €, sachant qu'il est rouge, est de: 2.5%.

2. Montrons que P (valeur du bon ≥ 30) $= 0.057$:

Etape 1: La probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur ≥ 30 €, sachant qu'il est rouge, est de: 2. 5%.

Etape 2: La probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur ≥ 30 €, sachant qu'il est vert, est de: $P_V(30) = 6.7\%$.

Etape 3: Or il y a 75% de verts et 25% de rouges.

D'où: P (valeur du bon ≥ 30 €) $= 2.5\% \times 25\% + 6.7\% \times 75\%$

$\Rightarrow$ P (valeur du bon ≥ 30 €) $\approx 5.7\%$.

La probabilité demandée est bien de: 5. 7%.

3. Les doutes du directeur sont-ils justifiés ?

Ici, nous avons: • $n = 200$

• $p = 5.7\%$

• $f = \dfrac{6}{200}$ $\Rightarrow$ $f = 3\%$.

Dans ces conditions:

$n = 200 \geq 30$, $n.p = 11.4 \geq 5$ et $n.(1 - p) = 188.6 \geq 5$.

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 200 clients privilégiés.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1.96 \times \left(\frac{p(1-p)}{n} \right)^{1/2} ; p + 1.96 \times \left(\frac{p(1-p)}{n} \right)^{1/2} \right]$$

À l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 2.49\% \,;\, 8.91\% \,]$

Or la fréquence " f " est telle que:

$$f = 3\% \in I.$$

Ainsi, comme $f \in I$, les doutes du directeur ne sont pas justifiés.