EXERCICE 3 (France Métropolitaine 2015)

① Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-8z+64=0$:

Soit l'équation : $z^2-8z+64=0$.

$\Delta = -192 \Rightarrow \Delta = (8\sqrt{3}\,i)^2$.

D'où 2 solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_1 = 4-(4\sqrt{3})i$,
- $z_2 = 4+(4\sqrt{3})i$.

Au total, les 2 solutions sont: $z_1 = 4-(4\sqrt{3})i$ et $z_2 = 4+(4\sqrt{3})i$.

② ⓐ Calculons l'argument et le module de a:

(a1). Le module de a est: $|a| = 8$. $(a = 4+4i\sqrt{3})$

(a2). Soit θ, l'argument de a :

$$a = 8(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

L'argument et le module de a sont: $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ et $|a| = 8$.

Sous forme exponentielle a s'écrit: $a = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ⓑ Donnons la forme exponentielle de b :

ⓑ1 . Le module de b est : $|b| = 8$. ($b = 4 - 4i\sqrt{3}$)

ⓑ2 . Soit θ, l'argument de b :

$$b = 8(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Par identification :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Sous forme exponentielle b s'écrit : $b = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ⓒ Montrons que les points A, B et C sont sur un même cercle dont on déterminera le rayon :

Les points A(a), B(b) et C(c) sont sur un même cercle de centre O ssi : $|a| = |b| = |c|$.

Or : $|a| = 8$, $|b| = 8$ et $|c| = (8^2)^{1/2}$ càd $|c| = 8$.

Au total, les points A, B et C sont sur un même cercle : de centre O et de rayon $R = 8$.

ⓓ Plaçons les points A, B et C :

Voir dernière page de ce corrigé.

③ ⓐ Montrons que $b'=8$:

$b' = b e^{i\frac{\pi}{3}}$.

D'où : $b' = \left(8e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \Rightarrow b'=8$.

Au total : $b'=8$.

ⓑ Calculons le module et un argument du nombre a' :

$a' = a e^{i\frac{\pi}{3}}$.

D'où : $a' = \left(8e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \Rightarrow a' = 8 e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Au total : • le module de a' est : $|a'| = 8$,

• un argument de a' est : $\frac{2\pi}{3}$.

④ ⓐ Calculons r et s :

(a1) Nous avons $R(r)$, R étant le milieu du segment $[A'B]$.

D'où : $r = \frac{a'+b}{2} \iff r = \frac{(-4+4i\sqrt{3}) + (4-4i\sqrt{3})}{2}$

$\Rightarrow r = 0$.

(a2) Nous avons $S(s)$, S étant le milieu du segment $[B'C]$.

D'où : $s = \frac{b'+c}{2} \iff s = \frac{(8)+(8i)}{2} \Rightarrow s = 4+4i$.

Au total : $r=0$ et $s = 4+4i$.

ⓑ La conjecture sur la nature du triangle RST :

Comme $RS = ST = RT$ car $|s-r| = |t-s| = |t-r| = 4\sqrt{2}$,

nous pouvons affirmer que : le triangle RST est équilatéral.