Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 22 JUIN 2015

Enseignement Obligatoire ***Coefficient : 7***

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 3 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\mathrm{i}$.

a. Calculer le module et un argument du nombre a.

b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ de centre O dont on déterminera le rayon.

d. Placer les points A, B et C dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2.d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Montrer que $b' = 8$.

b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\,\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\,\mathrm{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[\mathrm{MN}]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[\mathrm{A'B}]$, $[\mathrm{B'C}]$ et $[\mathrm{C'A}]$.

Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}(2+2\sqrt{3})$.

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

EXERCICE 3 (France Métropolitaine 2015)

① Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-8z+64=0$:

Soit l'équation : $z^2-8z+64=0$.

$\Delta=-192 \Rightarrow \Delta=(8\sqrt{3}\,i)^2$.

D'où 2 solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_1=4-(4\sqrt{3})i$,
- $z_2=4+(4\sqrt{3})i$.

Au total, les 2 solutions sont: $z_1=4-(4\sqrt{3})i$ et $z_2=4+(4\sqrt{3})i$.

② ⓐ Calculons l'argument et le module de a:

(a1). Le module de a est: $|a|=8$. $(a=4+4i\sqrt{3})$

(a2). Soit θ, l'argument de a :

$$a=8(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=8\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Par identification:

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

L'argument et le module de a sont: $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ et $|a|=8$.

Sous forme exponentielle a s'écrit: $a=8e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ⓑ Donnons la forme exponentielle de b :

ⓑ1 . Le module de b est : $|b| = 8$. $(b = 4 - 4i\sqrt{3})$

ⓑ2 . Soit θ, l'argument de b :

$$b = 8(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Par identification :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Sous forme exponentielle b s'écrit : $b = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ⓒ Montrons que les points A, B et C sont sur un même cercle dont on déterminera le rayon :

Les points A(a), B(b) et C(c) sont sur un même cercle de centre O ssi : $|a| = |b| = |c|$.

Or : $|a| = 8$, $|b| = 8$ et $|c| = (8^2)^{1/2}$ càd $|c| = 8$.

Au total, les points A, B et C sont sur un même cercle : de centre O et de rayon $R = 8$.

ⓓ Plaçons les points A, B et C :

Voir dernière page de ce corrigé.

③ ⓐ Montrons que $b'=8$:

$b' = b e^{i\frac{\pi}{3}}$.

D'où : $b' = \left(8e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \Rightarrow b'=8$.

Au total : $b'=8$.

ⓑ Calculons le module et un argument du nombre a' :

$a' = a e^{i\frac{\pi}{3}}$.

D'où : $a' = \left(8e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \Rightarrow a' = 8e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Au total : • le module de a' est : $|a'|=8$,

• un argument de a' est : $\frac{2\pi}{3}$.

④ ⓐ Calculons r et s :

a1) Nous avons $R(r)$, R étant le milieu du segment $[A'B]$.

D'où : $r = \frac{a'+b}{2} \Leftrightarrow r = \frac{(-4+4i\sqrt{3}) + (4-4i\sqrt{3})}{2}$

$\Rightarrow r=0$.

a2) Nous avons $S(s)$, S étant le milieu du segment $[B'C]$.

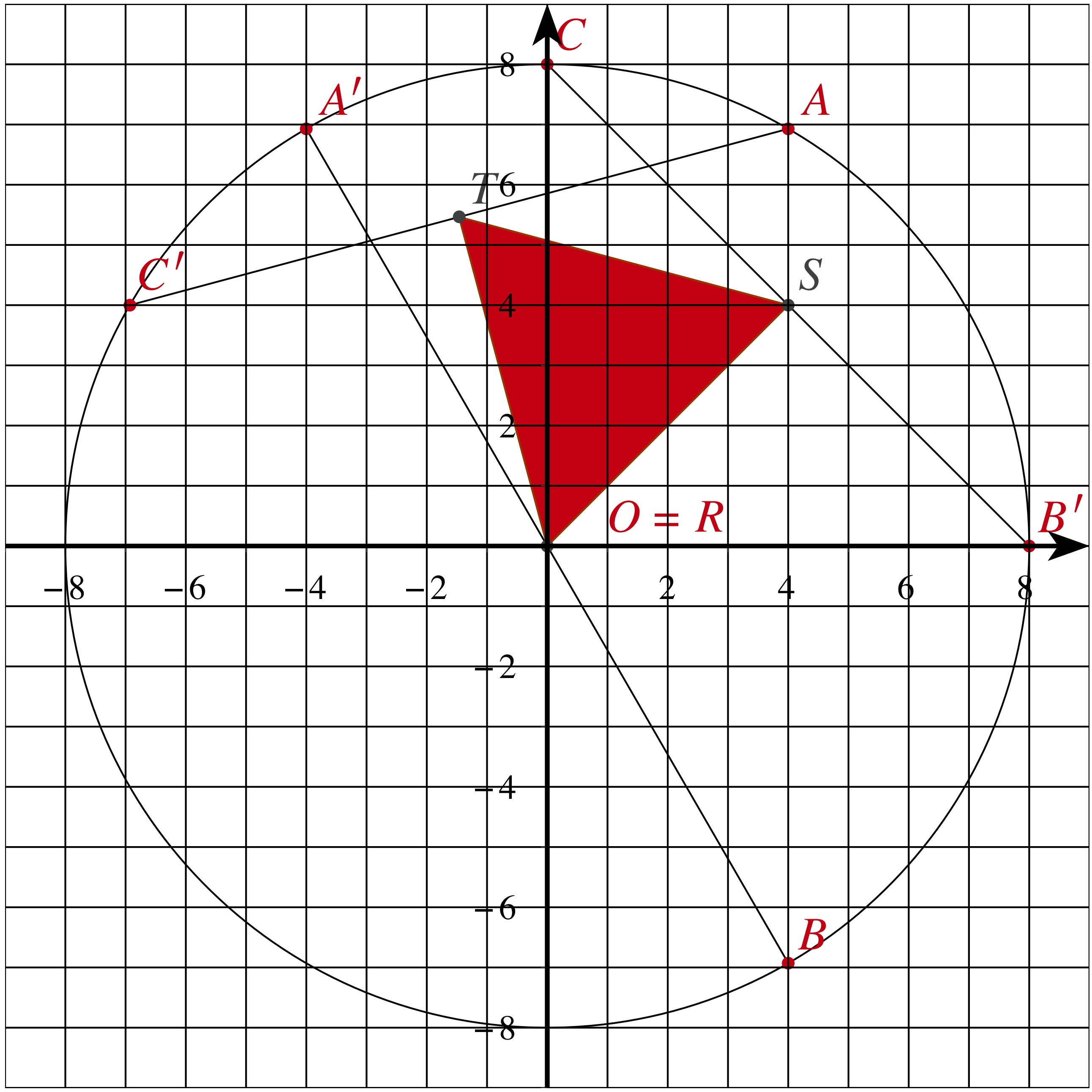
D'où : $s = \frac{b'+c}{2} \Leftrightarrow s = \frac{(8)+(8i)}{2} \Rightarrow s = 4+4i$.

Au total : $r=0$ et $s=4+4i$.

ⓑ La conjecture sur la nature du triangle RST :

Comme $RS = ST = RT$ car $|s-r| = |t-s| = |t-r| = 4\sqrt{2}$,

nous pouvons affirmer que : le triangle RST est équilatéral.



C
A′
A
T
S
C′
O = R
B′
B
8
6
4
2
−2
−4
−6
−8
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8