Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 22 JUIN 2015

Enseignement Obligatoire ***Coefficient : 7***

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (6 points) Commun à tous les candidats

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.

On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

a. Soit c et d deux réels tels que $0 \leq c < d$.

Démontrer que la probabilité $P(c \leq X \leq d)$ vérifie $P(c \leq X \leq d)=\mathrm{e}^{-\lambda c}-\mathrm{e}^{-\lambda d}$.

b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X>20)$ soit égale à 0,05.

c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda=0{,}15$.

d. Calculer $P(10 \leq X \leq 20)$.

e. Calculer la probabilité de l'événement $(X>18)$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.

a. Calculer la probabilité de l'événement $(20 \leq Y \leq 21)$.

b. Calculer la probabilité de l'événement $(Y<11) \cup (Y>21)$.

Partie 2

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.
Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.

Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.

De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1. Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

2. Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €.

Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.
Ses doutes sont-ils justifiés ?

EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2015]

Partie 1: Loi exponentielle

1. a. Démontrons que $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Dans ces conditions:

- $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$.

Il s'agit de calculer: $P(c \leqslant X \leqslant d)$.

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\, dx$$

$$= \int_c^d \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda x} \right]_c^d$$

$$= \left[-e^{-\lambda x} \right]_c^d$$

$\Rightarrow$ $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

Au total, nous avons bien: $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

1. b. Déterminons une valeur de λ telle que $P(X > 20) = 0,05$:

$P(X > 20) = 1 - P(X \leqslant 20)$

$= 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 20).$

D'où: $P(X > 20) = 0,05 \iff P(0 \leqslant X \leqslant 20) = 0,95$

$\iff e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda \times 20} = 0,95$

$\iff 1 - e^{-20\lambda} = 0,95$

$\Rightarrow \lambda \approx 0,15.$

Au total, la valeur de λ est: $\lambda \approx 0,15.$

1. c. Calculons E (X):

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x \times (\lambda\, e^{-\lambda x})\,dx$$

$$= \frac{1}{\lambda},$$ d'après le cours.

Comme $\lambda = 0,15$: $E(X) \approx 6,66.$

Au total, nous avons: $E(X) \approx 6,66.$

1. d. Calculons $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$:

$P(10 \leqslant X \leqslant 20) = e^{-\lambda \times 10} - e^{-\lambda \times 20}$

$= e^{-1,5} - e^{-3}$

$\Rightarrow \; P(10 \leqslant X \leqslant 20) \approx 0,173.$

Au total, la probabilité demandée est de: 17,3%.

1. e. Calculons $P(X > 18)$:

$P(X > 18) = 1 - P(X \leqslant 18)$

$= 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 18)$

$= 1 - (e^{0} - e^{-0,15 \times 18})$

$\Rightarrow \; P(X > 18) \approx 0,067.$

Au total, la probabilité demandée est de: 6,7%.

2. a. Calculons $P(20 \leqslant Y \leqslant 21)$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- Y suit la loi normale d'espérance $\mu = 16$ et d'écart type $\sigma = 1,95$.

Il s'agit de calculer: $P(20 \leqslant Y \leqslant 21)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(20 \leqslant Y \leqslant 21) \approx 0,015.$

Au total, la probabilité demandée est de: 1,5%.

2. b. Calculons $P((Y < 11) \cup (Y > 21))$:

Il s'agit de calculer: $P((Y < 11) \cup (Y > 21))$.

$P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leqslant Y \leqslant 21).$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P\left((Y < 11) \cup (Y > 21)\right) \approx 0,01.$$

Au total, la probabilité demandée est de: 1%.

EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2015]

Partie 2: Verte ou Rouge ?

1. Calculons la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur ≥ 30 € sachant qu'il est rouge:

D'après l'énoncé, nous avons:

- V = " le bon est de couleur verte ".
- R = " le bon est de couleur rouge ".

- $P(V) = 75\%$
- $P(R) = 25\%$

$(75\% + 25\% = 1)$.

- $P_V(30) = 0.067$.

- $P_R(30) = 0.015$
- $P_R(100) = 0.010$.

Soit " P ", la probabilité demandée: $P = P_R(30) + P_R(100)$

$\Rightarrow P = 2.5\%$.

Au total, la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur ≥ 30 €, sachant qu'il est rouge, est de: 2.5%.

2. Montrons que P (valeur du bon ≥ 30) = 0. 057:

Etape 1: La probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur ≥ 30 €, sachant qu'il est rouge, est de: 2. 5%.

Etape 2: La probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur ≥ 30 €, sachant qu'il est vert, est de: $P_V (30) = 6.7\%$.

Etape 3: Or il y a 75% de verts et 25% de rouges.

D'où: P (valeur du bon ≥ 30 €) = 2. 5% x 25% + 6. 7% x 75%

=> P (valeur du bon ≥ 30 €) ≈ 5. 7%.

La probabilité demandée est bien de: 5. 7%.

3. Les doutes du directeur sont-ils justifiés ?

Ici, nous avons: • $n = 200$

• $p = 5.7\%$

• $f = \dfrac{6}{200}$ => $f = 3\%$.

Dans ces conditions:

$n = 200 \geq 30$, $n\,.\,p = 11.4 \geq 5$ et $n\,.\,(1 - p) = 188.6 \geq 5$.

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 200 clients privilégiés.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1.96 \times \left(\frac{p(1-p)}{n} \right)^{1/2} ; p + 1.96 \times \left(\frac{p(1-p)}{n} \right)^{1/2} \right]$$

À l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 2.49\% \,;\, 8.91\% \,]$

Or la fréquence " f " est telle que:

$$f = 3\% \in I.$$

Ainsi, comme $f \in I$, les doutes du directeur ne sont pas justifiés.