Sujet Obligatoire

MATHÉMATIQUES

CENTRES ÉTRANGERS

BAC S - 2018

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU LUNDI 11 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire **Coefficient : 7**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

Exercice 1 - Pour tous les candidats (4 points)

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel. Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t=0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 20] par :

$$f(t)=(0,8t+0,2)\mathrm{e}^{-0,5t}+0,03.$$

On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 20].

Ainsi, la valeur $f(0)=0,23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	0,23	↗		↘	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.

a) Calculer $f(20)$.

b) Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.

2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.

a) Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.

b) On considère l'algorithme suivant :

```
t ← 1,75
p ← 0,1
V ← 0,7
Tant que V > 0,035
    t ← t + p
    V ← (0,8t + 0,2)e^(−0,5t) + 0,03
Fin Tant que
```

Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?
Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

a) Soit F la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 11] par : $F(t)=(-1,6t-3,6)\mathrm{e}^{-0,5t}+0,03t$.
Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 11].

b) En déduire le taux moyen V_m, valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 11].
Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.

EXERCICE 1

[Centres Étrangers 2018]

1. a. Calculons $f(20)$:

Ici: • $f(t) = (0,8t + 0,2)\,e^{-0,5t} + 0,03$

• $Df = [\,0\,;\,20\,]$.

Dans ces conditions: $f(20) = (0,8 \times 20 + 0,2)\,e^{-0,5 \times 20} + 0,03$

$= 16,2\,e^{-10} + 0,03$

$\approx 0,031$.

Ainsi: $f(20) \approx 0,031$.

Cela signifie que le taux de CO_2 au bout de 20 minutes est d'environ **3, 1%**.

1. b. Déterminons le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience:

D'après le tableau de variation de la fonction f sur $[\,0\,;\,20\,]$, nous constatons que le maximum de f est atteint au point $\boldsymbol{M\,(1,75\,;\,f\,(1,75))}$.

Or: $f(1,75) \approx 0,697$.

Ainsi: le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience est d'environ 69, 7%.

2. a. Justifions qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition:

Il s'agit de démontrer que l'équation $V = f(t) = 3,5\%$ admet une unique solution strictement positive que nous noterons: **T**.

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

> • Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$.
>
> Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a ; b]$ tel que: $f(c) = K$.
>
> Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a ; b]$.
>
> • Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a ; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a ; b]$.

Ici: • f est continue sur $[0 ; 20]$, donc sur $]1,75 ; 20]$.

• " $k = 3,5\%$ " est compris entre: $f(20) \approx 3,1\%$

et: $f(1,75) \approx 69,7\%$.

• f est strictement décroissante sur $]1,75 ; 20]$, d'après le tableau de variation de f.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(t) = 3,5\%$ $(k = 3,5\%)$ admet une unique solution **T** appartenant à $]1,75 ; 20]$.

Au total: $f(t) = 3,5\%$ admet une unique solution **T** sur $]1,75 ; 20]$.

2. b. b1. Déterminons la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme:

En programmant cet algorithme sur la calculatrice, nous obtenons comme valeur de la variable t à la fin de l'algorithme: $t = 15,75$ minutes.

En effet: • $f(15,65) \approx 0,0351 > 3,5\%$

• $f(15,75) \approx 0,03487 < 3,5\%$.

2. b. b2. Que représente cette valeur dans le cadre de l'exercice ?

Cela signifie que: **le taux de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience est inférieur ou égal à 3,5% au delà de 15,75 minutes.**

Notons que: 15,75 minutes = 15 minutes et 45 secondes.

3. a. Montrons que F est une primitive de f sur $[0; 11]$:

Sur l'intervalle $[0; 11]$, F est une primitive de f ssi: $F'(t) = f(t)$.

Or ici, pour tout $t \in [0; 11]$:

$$F'(t) = (-1,6 \times e^{-0,5t}) + ((-1,6t - 3,6) \times (-0,5\, e^{-0,5t})) + 0,03$$

$$= 0,8t\, e^{-0,5t} + 0,2\, e^{-0,5t} + 0,03$$

$$= (0,8t + 0,2)\, e^{-0,5t} + 0,03$$

$$= f(t).$$

Au total, pour tout $t \in [0; 11]$: F est bien une primitive de f car $F'(t) = f(t)$.

3. b. Déduisons-en le taux moyen V_m, valeur moyenne de f sur $[0; 11]$:

Soit " V_m ", le taux moyen au valeur moyenne de f sur $[0; 11]$.

V_m est tel que: $V_m = \dfrac{1}{11 - 0} \displaystyle\int_0^{11} f(x)\, dx$.

Or: $\dfrac{1}{11-0}\displaystyle\int_0^{11} f(x)\,dx = \dfrac{1}{11}\left[\,F(x)\,\right]_0^{11}$

$$= \frac{1}{11}\left(F(11) - F(0)\right)$$

$$\approx 34,9\% \text{ arrondi à } 0,1\%.$$

Au total: le taux moyen V_m est d'environ 34, 9%.

Cela signifie que le taux moyen de CO_2, dans le local pendant l'expérience, est d'environ 34, 9% pendant les 11 premières minutes.