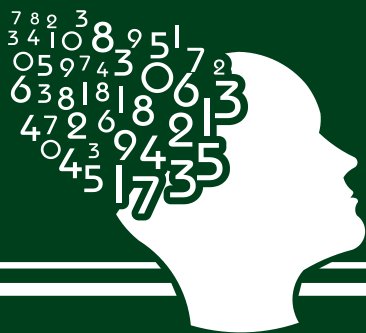


Corrigé

Exercice 3



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de la page 1/7 à la page 7/7.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire
n° 99-186 du 16 novembre 1999.

*_*_*_*

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL - Série S	SESSION 2017	
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	SUJET	
	Coefficient : 9	Page 1/7
17MASC SG11	Durée : 4 heures	

EXERCICE 3 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-à-dire sa concentration dans le plasma.

On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre ($\mu\text{g.L}^{-1}$), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.

Le modèle mathématique est : $f(t) = 20e^{-0,1t}$, avec $t \in [0 ; +\infty[$.

La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20 \mu\text{g.L}^{-1}$.

1) La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.

Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.

2) On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2 \mu\text{g.L}^{-1}$.

Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

3) En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en $\mu\text{g.L}^{-1}$, le nombre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt.$$

Vérifier que pour ce modèle, l'ASC est égal à $200 \mu\text{g.L}^{-1} \cdot \text{h}$.

Partie B : administration par voie orale

On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre ($\mu\text{g.L}^{-1}$), au bout de t heures après ingestion par voie orale.

Le modèle mathématique est : $g(t) = 20(e^{-0,1t} - e^{-t})$, avec $t \in [0 ; +\infty[$.

Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0 \mu\text{g.L}^{-1}$.

1) Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$g'(t) = 20e^{-t} (1 - 0,1e^{0,9t}).$$

2) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$.)

En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale.

On donnera le résultat à la minute près.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.

Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de $20 \mu\text{g.L}^{-1}$.

On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n -ième injection.

Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.

On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit $20\mu\text{g.L}^{-1}$, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

- 1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.
- 2) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
- 3) On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse $38 \mu\text{g.L}^{-1}$. Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

EXERCICE 3

[Centres Étrangers 2017]

Partie C: Administration répétée par voie intraveineuse

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $U_n = 40 - 40 \times 0,5^n$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- L'intervalle de temps entre deux injections est:

$$t_{0,5} = 6,9 \text{ heures arrondi au dixième.}$$

- La concentration initiale du médicament, après la 1^{ère} injection, est:

$$20 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1} \Leftrightarrow U_1 = 20 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}.$$

- Soit U_n , la concentration plasmatique du médicament après la n -ième injection:

$$U_{n+1} = 0,5 U_n + 20, \text{ pour tout entier } n \geq 1.$$

Nous allons montrer par récurrence que:

$$\text{" pour tout entier naturel } n \geq 1: U_n = 40 - 40 \times 0,5^n \text{ "}$$

Initialisation: • $U_1 = 40 - 40 \times (0,5)^1$?

$$\text{oui car: } U_1 = 20 \text{ et } 40 - 40(0,5)^1 = 20.$$

Donc vrai au rang " 1 ".

$$\bullet U_2 = 40 - 40(0,5)^2 ?$$

$$\text{oui car: } U_2 = 0,5(20) + 20 = 30 \text{ et } 40 - 40(0,5)^2 = 30.$$

Donc vrai au rang " 2 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 1$, supposons $U_n = 40 - 40 \times 0,5^n$
et montrons qu'alors: $U_{n+1} = 40 - 40 \times 0,5^{(n+1)}$.

Supposons: $U_n = 40 - 40 \times 0,5^n$, pour un entier naturel n fixé ($n \geq 1$).
(1)

$$(1) \Rightarrow 0,5 U_n = 20 - 40 \times 0,5^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow 0,5 U_n + 20 = 40 - 40 \times 0,5^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = 40 - 40 \times 0,5^{(n+1)}.$$

Conclusion: Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons: $U_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

2. Déterminons la limite de la suite (U_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 40 - 40 \times 0,5^n$$

$$= 40 \text{ car: } 0,5 \in]0; 1[.$$

Ainsi, la suite (U_n) est convergente et converge vers " 40 ".

3. Déterminons le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre $38 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$:

Le nombre minimal " x " d'injections nécessaires pour atteindre $38 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$
est tel que: $U_x \geq 38$.

$$U_x \geq 38 \Leftrightarrow 40 - 40 \times 0,5^x \geq 38$$

$$\Leftrightarrow -40 \times 0,5^x \geq -2$$

$$\Leftrightarrow 40 \times 0,5^x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x \times \ln(0,5) \leq -\ln(20)$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{-\ln(20)}{\ln(0,5)}, \text{ car: } 0,5 \in]0; 1[, \text{ et donc: } \ln(0,5) < 0$$

$$\Rightarrow x \geq 4,321.$$

Nous prendrons $x = 5$ injections car n est un entier ≥ 1 .

En conclusion, le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre l'équilibre ($38 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$) est de 5.