Corrigé

Exercice 3

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de la page 1/7 à la page 7/7.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

--*-*

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 3 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d ?administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.
Le modèle mathématique est : $f(t) = 20e^{-0,1t}$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20$ μg.L^{-1}.

1) La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.

2) On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}.
Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

3) En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en μg.L^{-1}, le nombre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt$.
Vérifier que pour ce modèle, l' ASC est égal à 200 μg.L^{-1}.h.

Partie B : administration par voie orale

On note g(t) la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.
Le modèle mathématique est : $g(t) = 20\left(e^{-0,1t} - e^{-t}\right)$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0\mu$g.L^{-1}.

1) Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$g'(t) = 20e^{-t}\left(1 - 0,1e^{0,9t}\right).$$

2) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$.)
En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale.
On donnera le résultat à la minute près.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20 μg.L^{-1}.

On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.
On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20μg.L^{-1}, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

2) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

3) On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L^{-1}.
Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

EXERCICE 3

[Centres Étrangers 2017]

Partie A: Administration par voie intraveineuse

1. Déterminons la demi-vie $t_{0,5}$:

Il s'agit ici de déterminer t tel que: $f(t) = 10$.

$f(t) = 10 \iff 20\, e^{-0,1t} = 10$

$\iff e^{-0,1t} = \dfrac{1}{2}$

$\iff e^{0,1t} = 2$

$\iff 0,1\, t = \ln(2)$

$\Rightarrow t_{0,5} = 10 \times \ln(2)$.

Au total, la demi-vie est: $t_{0,5} = 10 \times \ln(2)$ cad $t_{0,5} \approx 6,9$ heures.

6, 9 heures correspond en fait à: 6 heures et 54 minutes.

2. Déterminons le temps à partir duquel le médicament est éliminé:

Il s'agit ici de déterminer t tel que: $f(t) \leqslant 0,2$.

$f(t) \leqslant 0,2 \iff 20\, e^{-0,1t} \leqslant 0,2$

$\iff e^{-0,1t} \leqslant 0,01$

$\iff e^{0,1t} \geqslant 100$

$\iff 0,1t \geqslant \ln(100)$

$\Rightarrow t \geqslant 10 \times \ln(100)$ ou $t \geqslant t^*$, avec: $t^* = 10 \times \ln(100)$.

Au total, le temps à partir duquel le médicament sera éliminé est:

$t^* = 10 \times \ln(100)$ cad $t^* \approx 46,1$ heures (arrondi au dixième).

46, 1 heures correspond en fait à: 46 heures et 06 minutes.

3. Vérifions que l'ASC est égale à 200 $\mu g \cdot L^{-1} \cdot h$:

Il s'agit ici de calculer: $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt$.

Soit: $I = \int_0^x f(t)\,dt$.

f est continue sur $[0; +\infty[$, elle admet donc des primitives sur $[0; +\infty[$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$= \int_0^x 20\,e^{-0,1t}\,dt$$

$$= 20 \times \left[-\frac{e^{-0,1t}}{0,1} \right]_0^x \Rightarrow I = 200 - \frac{200}{e^{0,1x}}.$$

Dans ces conditions:

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} I$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(200 - \frac{200}{e^{0,1x}} \right)$$

$$= 200 \quad \left(\text{d'après le cours: } \lim_{x \to +\infty} -\frac{200}{e^{0,1x}} = 0 \right).$$

Au total, l'ASC est bien égale à: $200\ \mu g \cdot L^{-1} \cdot h$.

Partie B: Administration par voie orale

1. Démontrons que sur $[\,0\,;+\infty\,[$, $g'(t) = 20\, e^{-t}\,(1 - 0,1\, e^{0,9t})$:

Ici: • $g(t) = 20\,(e^{-0,1t} - e^{-t})$

• $Dg = [\,0\,;+\infty\,[$.

Posons: $g = 20\,(g_1 + g_2)$, avec: $g_1(t) = e^{-0,1t}$ et $g_2(t) = -\,e^{-t}$.

g_1 et g_2 sont dérivables sur IR comme fonctions " exponentielles ", donc dérivables sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

Dans ces conditions, $g_1 + g_2$ est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Par conséquent, $g = 20\,(g_1 + g_2)$ est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$: $g'(t) = 20\,(-\,0,1\, e^{-0,1t} + e^{-t})$

$$\Rightarrow\ g'(t) = 20\, e^{-t}\,(1 - 0,1\, e^{0,9t}).$$

Au total, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$, nous avons bien: $g'(t) = 20\, e^{-t}\,(1 - 0,1\, e^{0,9t})$.

2. a. Étudions les variations de g sur $[\,0\,;+\infty\,[$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$:

• **1er cas**: $g'(t) = 0$.

$g'(t) = 0$ ssi $1 - 0,1\, e^{0,9t} = 0$ $(20\, e^{-t} > 0$, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[\,)$

$$\iff e^{0,9t} = 10$$

$$\iff 0,9t = \ln(10), \text{ cad: } \quad t = \frac{\ln(10)}{0,9}.$$

• **$2^{ème}$ cas:** $g'(t) < 0$.

$g'(t) < 0$ ssi $1 - 0,1\,e^{0,9t} < 0$ ($20\,e^{-t} > 0$, pour tout $t \in [\,0 ; +\infty\,[$)

$$\iff e^{0,9t} > 10, \text{ cad: } \quad t > \frac{\ln(10)}{0,9}.$$

• **$3^{ème}$ cas:** $g'(t) > 0$.

$g'(t) > 0$ ssi $1 - 0,1\,e^{0,9t} > 0$ ($20\,e^{-t} > 0$, pour tout $t \in [\,0 ; +\infty\,[$)

$$\iff e^{0,9t} < 10, \text{ cad: } \quad t < \frac{\ln(10)}{0,9}.$$

Au total: • g est croissante sur $\left[\,0 ; \frac{\ln(10)}{0,9}\right]$,

(car sur $\left[\,0 ; \frac{\ln(10)}{0,9}\right]$, $g'(t) \geqslant 0$)

• g est décroissante sur $\left[\frac{\ln(10)}{0,9} ; +\infty\right[$.

(car sur $\left[\frac{\ln(10)}{0,9} ; +\infty\right[$, $g'(t) \leqslant 0$)

2. b. Dressons le tableau de variations de g:

t	0		$\frac{\ln(10)}{0,9}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = g(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = g\left(\dfrac{\ln(10)}{0,9}\right) \Rightarrow b \approx 13,94$,

• $c = \ldots .$

2. c. Déduisons-en la durée après laquelle la concentration est maximale:

D'après le tableau de variations, le maximum de g est atteint au point:

$$\left(\frac{\ln(10)}{0,9} ; g\left(\frac{\ln(10)}{0,9}\right)\right).$$

Or: $\dfrac{\ln(10)}{0,9} \approx 2,56$ heures.

Au total, la durée après laquelle la concentration est maximale est:

$$t_{max} \approx 2,56 \text{ heures}.$$

2, 56 heures correspond en fait à: 2 heures et 34 minutes.

freemaths.fr