Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de la page 1/7 à la page 7/7.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire
n° 99-186 du 16 novembre 1999.

--*-*

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 2 (4 points)

(commun à tous les candidats)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.
Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1) Vérifier que le point $A(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ appartient à la droite d_1.

2) Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

3) Vérifier que le vecteur $\vec{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4) Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$.
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.

b) Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

5) On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$, et passant par le point $B(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

b) Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2017]

1. **Vérifions que le point A (2 ; 3 ; 0) appartient à d_1:**

Une représentation paramétrique de d_1 est:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Dans ces conditions, si nous prenons la valeur particulière **t = 0**, nous obtenons:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$, ce qui correspond aux coordonnées du point A.

Au total: **oui** le point A appartient à d_1.

2. a. **Donnons un vecteur directeur de d_1 ($\vec{u}_1$) et de d_2 ($\vec{u}_2$):**

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ (a ; b ; c) un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

D'où ici: • la droite d_1 passe par A $(2 ; 3 ; 0)$ et a pour vecteur directeur

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

• la droite d_2 passe par C $(-5 ; -1 ; 5)$ et a pour vecteur directeur

$$\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. b. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

D'après le cours, d_1 et d_2 sont parallèles ssi: $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires ssi: il existe un réel α tel que $\vec{u}_1 = \alpha \cdot \vec{u}_2$.

$$\vec{u}_1 = \alpha \cdot \vec{u}_2 \iff \begin{cases} 1 = 2\alpha \\ -1 = \alpha \\ 1 = 0 \end{cases}, \text{ système impossible car } 1 \neq 0.$$

Au total: les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

3. Vérifions que $\vec{v}$ $(1 ; -2 ; -3)$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

• $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ car: $(1 \times 1) + (-2 \times (-1)) + (-3 \times 1) = 0$.

• $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}_2$ car: $(1 \times 2) + (-2 \times 1) + (-3 \times 0) = 0$.

Au total: $\vec{v}$ est bien orthogonal aux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

4. a. Déterminons l'équation cartésienne du plan P:

• D'après le cours, l'équation cartésienne d'un plan défini par un point $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ s'écrit:

$$a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0.$$

D'où ici, l'équation cartésienne du plan P s'écrit dans un premier temps:

$$a\,(x - 2) + b\,(y - 3) + c\,z = 0.$$

• A présent, nous devons déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n}$.

D'après le cours, un vecteur $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ est normal à un plan P ssi: ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Ici: $\vec{u_1}$ et $\vec{v}$ sont 2 vecteurs non colinéaires.

Dans ces conditions, $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u_1}$ et $\vec{v}$ ssi:

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{u_1} = 0 \\ \vec{n}\cdot\vec{v} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a - 2b - 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b = -c \\ a - 2b = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5c \\ b = -4c \\ c = c \end{cases}.$$

Nous pouvons prendre par exemple* comme valeur pour c: $c = -1$.

Dans ce cas: $a = 5$, $b = 4$ et $c = -1$.

[*: on aurait pu prendre n'importe quelle valeur pour c, cela n'aurait rien changé en ce qui concerne le résultat].

Au total, $\vec{n}\,(5\,;4\,;-1)$, $A\,(2\,;3\,;0)$ et l'équation cartésienne du plan P s'écrit:

$$5\,(x - 2) + 4\,(y - 3) - z = 0 \Rightarrow 5x + 4y - z - 22 = 0.$$

4. b. Montrons que d_2 coupe le plan P au point B (3 ; 3 ; 5):

La droite d_2 a pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 5 \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Soit **B (x_B ; y_B ; z_B)**, un point appartenant à la droite d_2.

B appartient aussi au plan P ssi ses coordonnées vérifient: $5x + 4y - z - 22 = 0$.

$5x_B + 4y_B - z_B - 22 = 0 \iff 5(-5 + 2t) + 4(-1 + t) - 5 - 22 = 0 \Rightarrow t = 4$.

Dans ces conditions, les coordonnées du point B sont:

$$\begin{cases} x = -5 + 8 = 3 \\ y = -1 + 4 = 3 \\ z = 5 \end{cases}.$$

Au total, d_2 coupe bien le plan P au point: B (3 ; 3 ; 5).

5. a. Donnons une représentation paramétrique de Δ:

La droite passant par B (3 ; 3 ; 5) et de vecteur directeur $\vec{v}$ (1 ; - 2 ; - 3) admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 5 - 3t' \end{cases} , t' \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, une représentation paramétrique de Δ est:

$$\begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 5 - 3t' \end{cases} , t' \in \mathbb{R}.$$

5. b. Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ?

Les droites d_1 et Δ sont sécantes ssi leur point d'intersection (s'il existe) vérifie le système:

$$\begin{cases} 2 + t = 3 + t' \\ 3 - t = 3 - 2t' \\ t = 5 - 3t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = 1 \end{cases}.$$

Comme le système admet une solution unique, les droites d_1 et Δ sont bien sécantes et se coupent au point: $H\,(3 + 1\,;\,3 - 2\,;\,5 - 3)$.

Au total, le point d'intersection entre d_1 et Δ est: $H\,(4\,;\,1\,;\,2)$.

5. c. Expliquons pourquoi Δ répond au problème posé:

Tout au long de l'exercice, nous avons vu les points suivants:

- Δ a comme vecteur directeur $\vec{v}$ qui est orthogonal aux droites d_1 et d_2 ;
- Les droites d_1 et Δ sont sécantes au point H;
- Le point B appartient à la droite Δ ainsi qu'à la droite d_2.

Par conséquent: Δ est bien une droite qui est à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2, et est orthogonale à ces deux droites.