Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de la page 1/7 à la page 7/7.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

--*-*

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

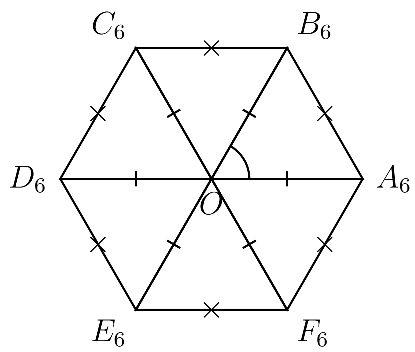
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O.
On note $r_n = OA_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$



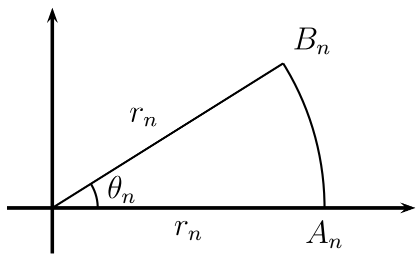
On a représenté ci-contre un polygone P_6.

1) Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.

2) Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6.

3) En déduire que $r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$



Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geqslant 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.
On note alors $r_n e^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

1) Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle OA_nB_n puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.

2) On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.
Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n}\right)$, puis démontrer que :

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

Ainsi, le nombre r_n, défini dans la partie B pour $n \geqslant 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par :

$$r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.

1) Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, on a : $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.

2) En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L, et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3) On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?

EXERCICE 4

[Centres Étrangers 2017]

Partie A: Étude du cas $n = 6$

1. Justifions que le triangle OA_6B_6 est équilatéral avec une aire égale à $\frac{1}{6}$:

Nous savons que:

- un triangle équilatéral est un triangle dont les 3 côtés sont égaux;
- un triangle isocèle est un triangle ayant au moins deux côtés de même longueur.

Soit le triangle OA_6B_6 isocèle en O, nous avons: $OA_6 = OB_6 = r_6$.

De plus, l'angle au sommet de ce triangle OA_6B_6 est: $\widehat{A_6OB_6} = \frac{\pi}{3}$.

En effet, le polygone est constitué de 6 triangles superposables au triangle OA_6B_6, et par conséquent: $\widehat{A_6OB_6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire:

$$\frac{\pi}{3} + \widehat{OA_6B_6} + \widehat{OB_6A_6} = \pi \iff \frac{\pi}{3} + 2 \times (\widehat{OA_6B_6}) = \pi \implies \widehat{OA_6B_6} = \frac{\pi}{3}.$$

Ainsi: $\widehat{A_6OB_6} = \widehat{OA_6B_6} = \widehat{OB_6A_6} = \frac{\pi}{3}$.

Au total, comme $OA_6 = OB_6 = A_6B_6$:

les 3 côtés sont égaux et ainsi le triangle OA_6B_6 est équilatéral.

Et comme l'aire du polygone est égale à " 1 " et qu'il y a 6 triangles superposables au triangle OA_6B_6:

$$\text{l'aire du triangle } OA_6B_6 = \frac{1}{6}.$$

2. Exprimons la hauteur du triangle OA_6B_6, issue du sommet B_6, en fonction de r_6:

D'après le cours, nous savons que:

- l'aire du triangle OA_6B_6 est: $\mathscr{A} = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}}$, avec $x = r_6$;
- l'aire du triangle OA_6B_6 est: $\mathscr{A} = \frac{x \times \text{hauteur}}{2}$, avec $x = r_6$.

En égalisant, nous avons:

$$\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x \times \text{hauteur}}{2} \iff \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \text{hauteur}$$

$$\iff \sqrt{\frac{3r_6^{\,2}}{4}} = \text{hauteur}$$

$$\implies \text{hauteur} = h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times r_6.$$

Au total, la hauteur du triangle OA_6B_6, issue du sommet B_6, est: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times r_6$.

3. Déduisons-en r_6:

Nous savons que: $\mathscr{A} = \frac{1}{6}$ et $\mathscr{A} = \frac{r_6 \times \text{hauteur}}{2}$.

D'où: $\frac{1}{6} = \frac{r_6 \times \text{hauteur}}{2} \iff \frac{1}{6} = \frac{r_6}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times r_6$

$$\iff \frac{1}{6} = r_6^{\,2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_6^{\,2} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$

Au total, nous avons bien: $r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$

Partie B: Cas général $n \geq 4$

1. a. La hauteur issue de B_n dans le triangle OA_nB_n en fonction de r_n et θ_n ?

Elle est égale à: $h = r_n \sin(\theta_n)$.

1. b. L'aire du triangle OA_nB_n en fonction de r_n et θ_n ?

L'aire du triangle OA_nB_n est: $\mathcal{A} = \frac{x \times \text{hauteur}}{2}$, avec $x = r_n$.

D'où: $\mathcal{A} = \frac{r_n \times r_n \sin(\theta_n)}{2} \Rightarrow \mathcal{A} = \frac{r_n^2 \sin(\theta_n)}{2}.$

En conclusion, nous avons bien: $\mathcal{A} = \frac{r_n^2 \sin(\theta_n)}{2}.$

2. a. Donnons, en fonction de n, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n})$:

Comme le polygone est constitué de " n " triangles superposables au triangle OA_nB_n: $\widehat{A_nOB_n} = \frac{2\pi}{n}$.

Ainsi, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n})$ est: $\frac{2\pi}{n}$.

2. b. Déterminons r_n :

Comme dit précédemment : $\mathcal{A} = \dfrac{r_n^2 \sin(\theta_n)}{2}$ (1).

Or : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{n}$.

D'où : (1) $\iff \dfrac{1}{n} = \dfrac{r_n^2 \sin(\theta_n)}{2}$

$\iff r_n^2 = \dfrac{2}{n} \times \dfrac{1}{\sin(\theta_n)}$

$\iff r_n^2 = \dfrac{2}{n} \times \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ $\left(\text{car : } \theta_n = \dfrac{2\pi}{n}\right)$

$\Rightarrow r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}$.

Au total : $r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}$.

Partie C : Étude de la suite (r_n)

1. Montrons que la suite (r_n) est décroissante :

Pour tout entier $n \geq 4$: $n+1 > n > 4$ (a).

(a) $\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow 2\pi \times 0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \dfrac{2\pi}{4}$

$$\Rightarrow \; 0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{2} < \pi$$

$$\Rightarrow \; 0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \pi \quad (b).$$

Or, f est strictement croissante sur l'intervalle $]\,0\,;\,\pi\,[$.

D'où: $(b) \Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\, f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < \frac{1}{\pi}\, f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\pi}\, f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)} < \sqrt{\frac{1}{\pi}\, f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow r_{n+1} < r_n.$$

Au total, $n+1 > n > 4 \Rightarrow r_{n+1} < r_n$: la suite (r_n) est donc strictement décroissante sur $[\,4\,;\,+\infty\,[$.

2. Déduisons-en que la suite (r_n) est convergente:

Nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici:
- (r_n) est minorée par $m = 0$ $(r_n = OA_n \geqslant 0)$
- (r_n) est strictement décroissante pour tout entier $n \geqslant 4$.

Donc nous pouvons affirmer que (r_n) est une suite convergente.

3. Déterminons la valeur numérique de n affichée par cet algorithme:

Cet algorithme affiche la première valeur de n à partir de laquelle: $r_n \leqslant 0{,}58$.

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons: $n = 11$.

11 est donc la valeur numérique affichée par cet algorithme.