

# Corrigé

## Exercice 2



---

---

freemaths.fr

---

---

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de la page 1/7 à la page 7/7.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire  
n° 99-186 du 16 novembre 1999.

\*\_\*\_\*\_\*

**Le candidat doit traiter les quatre exercices.**

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront  
pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL - Série S	SESSION 2017	
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	SUJET	
	Coefficient : 7	Page 1/7
17MASCOG11	Durée : 4 heures	

**EXERCICE 2 (4 points )**

**(commun à tous les candidats)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère deux droites  $d_1$  et  $d_2$  définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont non coplanaires.

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite  $\Delta$  qui soit à la fois sécante avec les deux droites  $d_1$  et  $d_2$  et orthogonale à ces deux droites.

- 1) Vérifier que le point  $A(2 ; 3 ; 0)$  appartient à la droite  $d_1$ .
- 2) Donner un vecteur directeur  $\vec{u}_1$  de la droite  $d_1$  et un vecteur directeur  $\vec{u}_2$  de la droite  $d_2$ .  
Les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont-elles parallèles ?
- 3) Vérifier que le vecteur  $\vec{v}(1 ; -2 ; -3)$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ .
- 4) Soit  $P$  le plan passant par le point  $A$ , et dirigé par les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{v}$ .  
On étudie dans cette question l'intersection de la droite  $d_2$  et du plan  $P$ .
  - a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan  $P$  est :  $5x + 4y - z - 22 = 0$ .
  - b) Montrer que la droite  $d_2$  coupe le plan  $P$  au point  $B(3 ; 3 ; 5)$ .
- 5) On considère maintenant la droite  $\Delta$  dirigée par le vecteur  $\vec{v}(1 ; -2 ; -3)$ , et passant par le point  $B(3 ; 3 ; 5)$ .
  - a) Donner une représentation paramétrique de cette droite  $\Delta$ .
  - b) Les droites  $d_1$  et  $\Delta$  sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.
  - c) Expliquer pourquoi la droite  $\Delta$  répond au problème posé.

## EXERCICE 2

### [ Centres Étrangers 2017 ]

1. Vérifions que le point A (2 ; 3 ; 0) appartient à d :

Une représentation paramétrique de d, est:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Dans ces conditions, si nous prenons la valeur particulière  $t = 0$ , nous obtenons:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ ce qui correspond aux coordonnées du point A.}$$

**Au total:** oui le point A appartient à d.

2. a. Donnons un vecteur directeur de d, ( $\vec{u}_1$ ) et de d<sub>2</sub> ( $\vec{u}_2$ ):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A ( $x_A; y_A; z_A$ ) un point de l'espace.
- Soit  $\vec{u}$  ( $a; b; c$ ) un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur  $\vec{u}$  admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

D'où ici: • la droite  $d_1$  passe par  $A(2; 3; 0)$  et a pour vecteur directeur

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

• la droite  $d_2$  passe par  $C(-5; -1; 5)$  et a pour vecteur directeur

$$\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 2. b. Les droites $d_1$ et $d_2$ sont-elles parallèles ?

D'après le cours,  $d_1$  et  $d_2$  sont parallèles ssi:  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont colinéaires.

Les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont colinéaires ssi: il existe un réel  $\alpha$  tel que  $\vec{u}_1 = \alpha \cdot \vec{u}_2$ .

$$\vec{u}_1 = \alpha \cdot \vec{u}_2 \iff \begin{cases} 1 = 2\alpha \\ -1 = \alpha \\ 1 = 0 \end{cases}, \text{ système impossible car } 1 \neq 0.$$

**Au total:** les droites  $d_1$  et  $d_2$  ne sont pas parallèles.

## 3. Vérifions que $\vec{v}(1; -2; -3)$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ :

•  $\vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u}_1$ , car:  $(1 \times 1) + (-2 \times (-1)) + (-3 \times 1) = 0$ .

•  $\vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u}_2$  car:  $(1 \times 2) + (-2 \times 1) + (-3 \times 0) = 0$ .

**Au total:**  $\vec{v}$  est bien orthogonal aux vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ .

#### 4. a. Déterminons l'équation cartésienne du plan P:

- D'après le cours, l'équation cartésienne d'un plan défini par un point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et un vecteur normal  $\vec{n}(a; b; c)$  s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

D'où ici, l'équation cartésienne du plan P s'écrit dans un premier temps:

$$a(x - 2) + b(y - 3) + cz = 0.$$

- A présent, nous devons déterminer les coordonnées du vecteur  $\vec{n}$ .

D'après le cours, un vecteur  $\vec{n}(a; b; c)$  est normal à un plan P ssi: ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Ici:  $\vec{u}$ , et  $\vec{v}$  sont 2 vecteurs non colinéaires.

Dans ces conditions,  $\vec{n}$  est orthogonal à  $\vec{u}$ , et  $\vec{v}$  ssi:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a - 2b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -c \\ a - 2b = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5c \\ b = -4c \\ c = c \end{cases}.$$

Nous pouvons prendre par exemple\* comme valeur pour c:  $c = -1$ .

Dans ce cas:  $a = 5$ ,  $b = 4$  et  $c = -1$ .

[ \*: on aurait pu prendre n'importe quelle valeur pour c, cela n'aurait rien changé en ce qui concerne le résultat ]

Au total,  $\vec{n}(5; 4; -1)$ ,  $A(2; 3; 0)$  et l'équation cartésienne du plan P s'écrit:

$$5(x - 2) + 4(y - 3) - z = 0 \Rightarrow 5x + 4y - z - 22 = 0.$$

4. b. Montrons que  $d_2$  coupe le plan  $P$  au point  $B(3; 3; 5)$ :

La droite  $d_2$  a pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Soit  $B(x_B; y_B; z_B)$ , un point appartenant à la droite  $d_2$ .

$B$  appartient aussi au plan  $P$  ssi ses coordonnées vérifient:  $5x + 4y - z - 22 = 0$ .

$$5x_B + 4y_B - z_B - 22 = 0 \Leftrightarrow 5(-5 + 2t) + 4(-1 + t) - 5 - 22 = 0 \Rightarrow t = 4.$$

Dans ces conditions, les coordonnées du point  $B$  sont:

$$\begin{cases} x = -5 + 8 = 3 \\ y = -1 + 4 = 3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Au total,  $d_2$  coupe bien le plan  $P$  au point:  $B(3; 3; 5)$ .

5. a. Donnons une représentation paramétrique de  $\Delta$ :

La droite passant par  $B(3; 3; 5)$  et de vecteur directeur  $\vec{v}(1; -2; -3)$  admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 5 - 3t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, une représentation paramétrique de  $\Delta$  est:

$$\begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 5 - 3t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

### 5. b. Les droites $d_1$ et $\Delta$ sont-elles sécantes ?

Les droites  $d_1$  et  $\Delta$  sont sécantes ssi leur point d'intersection (s'il existe) vérifie le système:

$$\begin{cases} 2 + t = 3 + t' \\ 3 - t = 3 - 2t' \\ t = 5 - 3t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = 1 \end{cases}.$$

Comme le système admet une solution unique, les droites  $d_1$  et  $\Delta$  sont bien sécantes et se coupent au point:  $H(3 + 1; 3 - 2; 5 - 3)$ .

Au total, le point d'intersection entre  $d_1$  et  $\Delta$  est:  $H(4; 1; 2)$ .

### 5. c. Expliquons pourquoi $\Delta$ répond au problème posé:

Tout au long de l'exercice, nous avons vu les points suivants:

- $\Delta$  a comme vecteur directeur  $\vec{v}$  qui est orthogonal aux droites  $d_1$  et  $d_2$ ;
- Les droites  $d_1$  et  $\Delta$  sont sécantes au point H;
- Le point B appartient à la droite  $\Delta$  ainsi qu'à la droite  $d_2$ .

**Par conséquent:**  $\Delta$  est bien une droite qui est à la fois sécante avec les deux droites  $d_1$  et  $d_2$ , et est orthogonale à ces deux droites.