EXERCICE 4 (Centres Etrangers 2016)

Partie A : Ligne brisée formée à partir de 7 points

① Déterminons la forme algébrique de z_1 :

Ici : $n=6$ et pour tout $k \in [0;6]$, $z_k = \left(1+\frac{k}{6}\right)e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

D'où : $z_1 = \left(1+\frac{1}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z_1 = \frac{7}{6}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Ainsi, nous pouvons écrire : $z_1 = \frac{7}{6}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{7}{6}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{7}{12} + \left(\frac{7\sqrt{3}}{12}\right)i.$$

Au total, sous forme algébrique : $z_1 = \frac{7}{12} + \left(\frac{7\sqrt{3}}{12}\right)i$.

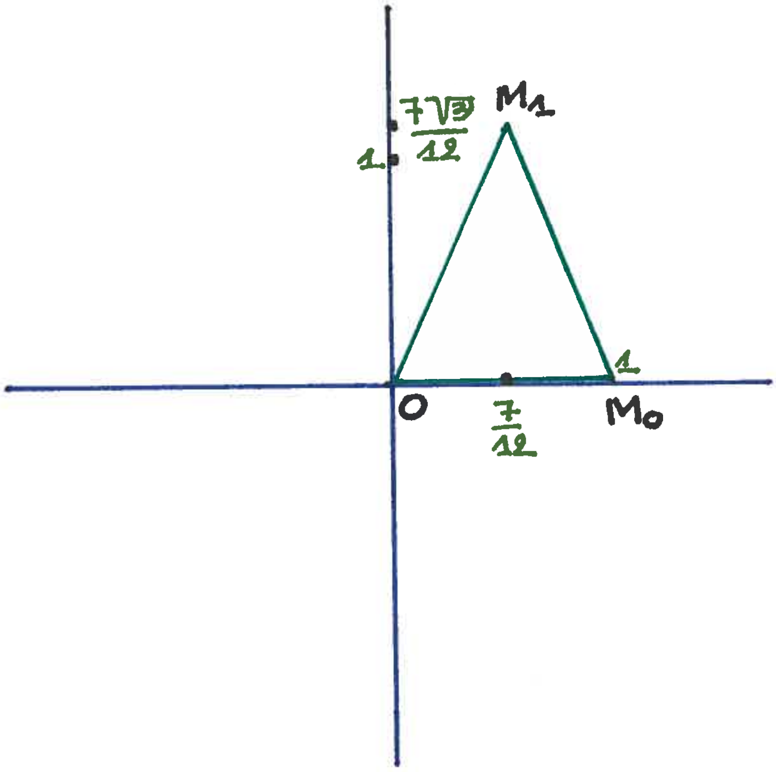
② Vérifions que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera :

- $z_0 = \left(1+\frac{0}{6}\right)e^{i\frac{2\times 0\times\pi}{6}} \Rightarrow z_0 = 1$.
- $z_6 = \left(1+\frac{6}{6}\right)e^{i\frac{2\times 6\times\pi}{6}} \Rightarrow z_6 = 2$ ($\cos 2\pi = 1$ et $\sin 2\pi = 0$).

Au total, z_0 et z_6 sont bien des entiers avec : $z_0 = 1$ et $z_6 = 2$.

③ ⓐ Calculons la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 :

Etape 1 : Représentation graphique du triangle OM_0M_1.



Etape 2 : Réponse à la question posée.

Grâce au graphique, nous pouvons dire que la hauteur, issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1, a pour longueur la partie imaginaire de M_1 (z_1) cad : $H = \frac{7\sqrt{3}}{12}$.

Au total : $H = \frac{7\sqrt{3}}{12}$.

ⓑ Etablissons que l'aire du triangle $OM_0M_1 = 7\sqrt{3}/24$:

L'aire d'un triangle est : $\mathcal{A} = \frac{\text{Base du triangle} \times \text{Hauteur}}{2}$.

Ici, nous avons donc : $\mathcal{A} = \frac{1 \times (7\sqrt{3}/12)}{2} \Rightarrow \mathcal{A} = 7\sqrt{3}/24$.

Au total : $\mathcal{A} = 7\sqrt{3}/24$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de (n+1) points

① Déterminons la longueur OM_k :

La longueur OM_k est : $|z_k - 0|$, avec $M_k(z_k)$ et $O(0)$.

Or : $z_k = \left(1+\frac{k}{n}\right) e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Dans ces conditions : $|z_k| = 1+\frac{k}{n}$, avec $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n$.

Au total, la longueur OM_k est : $1+\frac{k}{n}$.

②ⓐ Déterminons une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_k})$:

Une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_k})$ est : $\arg(z_k)$.

Or : $\arg(z_k) = \frac{2k\pi}{n}$.

Au total, une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_k})$ est :

$\frac{2k\pi}{n}$, avec : $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n$.

ⓑ Déterminons une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}})$:

Une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}})$ est : $\arg(z_{k+1})$.

Or : $z_{k+1} = \left(1+\frac{(k+1)}{n}\right) e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}$.

D'où : $\arg(z_{k+1}) = \frac{2(k+1)\pi}{n}$.

Au total, une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}})$ est :

$\frac{2(k+1)\pi}{n}$, avec : $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n$.

ⓒ Déduisons-en une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}})$:

Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k}\,;\,\overrightarrow{OM_{k+1}})$ est :

$$(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_{k+1}}) - (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_k})\ [2\pi].$$

D'où : $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_{k+1}}) - (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_k}) = \dfrac{2(k+1)\pi}{n} - \dfrac{2k\pi}{n}\ [2\pi]$

cad : $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_{k+1}}) - (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_k}) = \dfrac{2\pi}{n}\ [2\pi].$

Au total, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k}\,;\,\overrightarrow{OM_{k+1}})$ est : $\dfrac{2\pi}{n}\ [2\pi].$

③ Démontrons que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est $\left(1+\left(\dfrac{k+1}{n}\right)\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$:

Soit H_{k+1} le pied de la hauteur de longueur h_{k+1} issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1}.

Dans ces conditions, $OH_{k+1}M_{k+1}$ est un triangle rectangle en H_{k+1}.

Ainsi : $\dfrac{H_{k+1}M_{k+1}}{OM_{k+1}} = \sin\left(\overrightarrow{OH_{k+1}}\,;\,\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{H_{k+1}M_{k+1}}{OM_{k+1}} = \frac{h_{k+1}}{OM_{k+1}} = \sin\left(\overrightarrow{OH_{k+1}}\,;\,\overrightarrow{OM_{k+1}}\right).\ (a)$$

or, nous savons que :

- $(\overrightarrow{OH_{k+1}}\,;\,\overrightarrow{OM_{k+1}}) = (\overrightarrow{OM_k}\,;\,\overrightarrow{OM_{k+1}}) = \dfrac{2\pi}{n}\ [2\pi]$;

- $OM_{k+1} = 1 + \dfrac{(k+1)}{n}$.

D'où : (a) $\Rightarrow h_{k+1} = OM_{k+1} \times \sin\left(\overrightarrow{OH_{k+1}}\,;\,\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$

$$\Rightarrow h_{k+1} = OM_{k+1} \times \sin\left(\overrightarrow{OM_k} ; \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$$

$$\Rightarrow h_{k+1} = \left[1 + \left(\frac{k+1}{n}\right)\right] \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Au total, on a bien: $h_{k+1} = \left[1 + \left(\frac{k+1}{n}\right)\right] \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$

④ Recopions et completons le tableau:

Le tableau recopié et completé qui illustre le fonctionnement de l'algorithme est le suivant:

k	8	9
A	5,731	6,848

⑤ Recopions et completons les lignes L6 et L13:

Les lignes L6 et L13 qui permettent de determiner le plus petit entier n tel que $A_n \geqslant 7{,}2$ sont:

L6 Tant que $A < 7{,}2$

L13 Afficher n