EXERCICE 3

[Centres Étrangers 2016]

Partie A: Le sondage

1. a. Déterminons en justifiant la loi de la variable aléatoire X:

Soit l'expérience aléatoire consistant à interroger 700 personnes.

Soient les événements $A =$ " la personne interrogée accepte de répondre à la question ", et $\bar{A} =$ " la personne interrogée refuse de répondre à la question ".

On désigne par X le nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

Nous sommes en présence de 700 épreuves aléatoires indépendantes, avec $\Omega = \{ A ; \bar{A} \}$ et $X(\Omega) = \{ 0, 1, 2, ..., 700 \}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de A suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 700$ et $p = 0.6$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(700 ; 0.6)$.

En fait, on répète 700 fois un schéma de Bernoulli.

Et nous pouvons écrire: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

1. b. Déterminons la meilleure approximation de $P(X \geq 400)$:

Il s'agit ici de donner la meilleure approximation de $P(X \geq 400)$, avec: $X \rightsquigarrow B(700 ; 0.6)$.

Or: $P(X \geq 400) = 1 - P(X \leq 399)$.

À l'aide d'une machine à calculer: $P(X \leq 399) \approx 0.0573$.

Dans ces conditions: $P(X \geq 400) \approx 0.9427$.

D'où la meilleure approximation de $P(X \geq 400)$ est: 94%.

2. Déterminons le nombre de personnes demandées:

Ici, il s'agit de déterminer " n " tel que:

$P(X \geq 400) > 0.9$, avec: $X \rightsquigarrow B(n\,;0.6)$.

Grâce à la question précédente, nous savons déjà que:

$P(X \geq 400) \approx 0.9427$, quand $n = 700$.

Donc nous pouvons affirmer que: $n < 700$.

$$P(X \geq 400) > 0.9 \iff 1 - P(X \leq 399) > 0.9$$

$$\iff P(X \leq 399) < 0.1.$$

À l'aide d'une machine à calculer et avec $n = 694$, on trouve:

$$P(X \leq 399) \approx 0.0955.$$

Nous retiendrons: $n = 694$ personnes.

Ainsi l'institut doit interroger au minimum 694 personnes pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0.9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B: Le projet

1. Donnons un intervalle de confiance à 95% de la proportion de personnes qui sont favorables au projet:

Ici, nous avons: • $n \geq 50$

• $f = 0.29 \Rightarrow f = 29\%$.

Dans ces conditions:

$n \geq 30$, $n \cdot f = n \cdot 0.29 \geq 5$ et $n \cdot (1 - f) \geq 5$. (car: $n \geq 50$)

Les conditions étant réunies, un intervalle de confiance à 95% de la proportion de personnes qui sont favorables au projet s'écrit:

$$I = [\, f - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \,], \quad \text{cad:} \quad I = [\, 0.29 - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, 0.29 + \frac{1}{\sqrt{n}} \,].$$

2. Déterminons la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance à 95% ait une amplitude inférieure ou égale à 0.04:

Nous savons que: $I = [\, 0.29 - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, 0.29 + \frac{1}{\sqrt{n}} \,]$

cad: $I = [$ Borne inférieure ; Borne supérieure $]$.

La longueur ou amplitude de l'intervalle I est:

$L =$ Borne supérieure - Borne inférieure $\Rightarrow L = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

On cherche donc n tel que: $L \leq 0.04$.

$L \leq 0.04 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0.04 \Rightarrow n \geq 2500$.

Au total, la valeur minimale de n est: 2500 personnes.

Partie C: L'arbre de probabilité

1. Indiquons les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- F = " la personne est en réalité favorable ".
- $\overline{F}$ = " la personne est en réalité défavorable ".
- A = " la personne affirme qu'elle est favorable ".
- $\overline{A}$ = " la personne affirme qu'elle est défavorable ".

- $P(A) = 29\%$
- $P(\overline{A}) = 71\%$

$(29\% + 71\% = 1)$.

- $P_F(A) = 85\%$
- $P_F(\overline{A}) = 15\%$

$(85\% + 15\% = 1)$.

- $P_{\overline{F}}(A) = 15\%$
- $P_{\overline{F}}(\overline{A}) = 85\%$

$(15\% + 85\% = 1)$.

Au total, nous pouvons ainsi affirmer que:

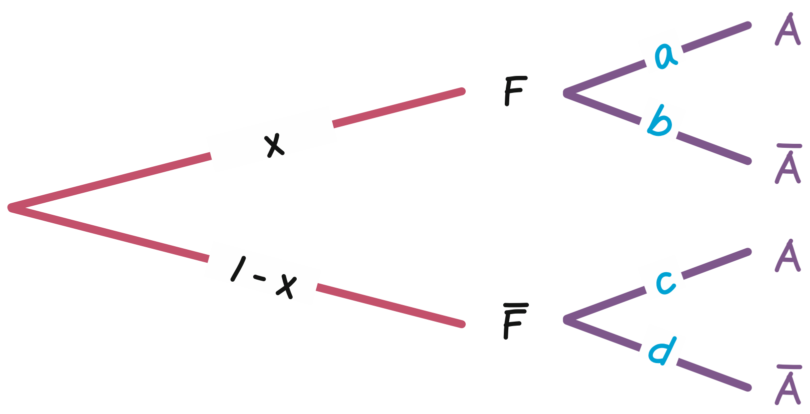
- $P_F(A) = 85\%$
- $P_{\overline{F}}(A) = 15\%$.

A partir de toutes ces données, il est alors possible de construire un arbre de probabilité, en posant:

$$x = P(F) \quad \text{et} \quad 1 - x = P(\overline{F}).$$

2. a. Complétons l'arbre de probabilité:

Nous avons l'arbre de probabilité suivant:



, avec:
- $a = 85\ \%$
- $b = 15\ \%$
- $c = 15\ \%$
- $d = 85\ \%$

2. b. Déduisons-en l'égalité vérifiée par le réel x:

L'événement $A = (A \cap F) \cup (A \cap \overline{F})$.

D'où: $P(A) = P(A \cap F) + P(A \cap \overline{F})$

$$= P_F(A) \times P(F) + P_{\overline{F}}(A) \times P(\overline{F}).$$

Ainsi: $P(A) = 85\%\,(x) + 15\%\,(1 - x)$

cad: $29\% = 70\%\,(x) + 15\%$ => $7x + 1.5 = 2.9$. (a)

L'égalité vérifiée par x est donc: $7x + 1.5 = 2.9$.

3. Déterminons, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet:

Cela revient à résoudre l'équation (a).

(a) <=> $7x + 1.5 = 2.9$ => $x = 20\%$ de personnes.

Au total, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet est de: 20%.