Corrigé

Exercice 3

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 9

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de la page 1/8 à la page 8/8.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

--*-*

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A - Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1) L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

b) Quelle est la meilleure approximation de $P(X \geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

$$0,92 \qquad 0,93 \qquad 0,94 \qquad 0,95.$$

2) Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B - Proportion de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50).
Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1) Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.

2) Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Partie C - Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0,29$.

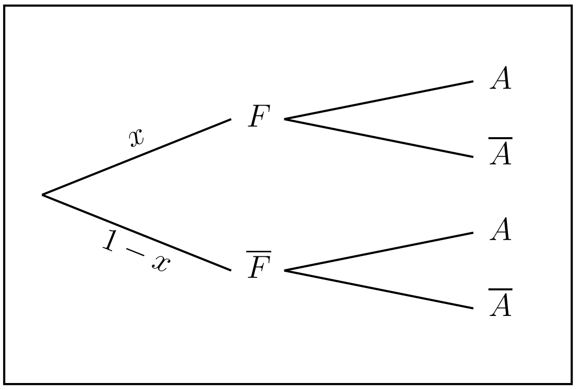
1) En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$.

2) On pose $x = P(F)$.

a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

b) En déduire une égalité vérifiée par le réel x.

3) Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.



EXERCICE 3

[Centres Étrangers 2016]

Partie A: Le sondage

1. a. Déterminons en justifiant la loi de la variable aléatoire X:

Soit l'expérience aléatoire consistant à interroger 700 personnes.

Soient les événements $A =$ " la personne interrogée accepte de répondre à la question ", et $\bar{A} =$ " la personne interrogée refuse de répondre à la question ".

On désigne par X le nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

Nous sommes en présence de 700 épreuves aléatoires indépendantes, avec $\Omega = \{ A ; \bar{A} \}$ et $X (\Omega) = \{ 0, 1, 2, ..., 700 \}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de A suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 700$ et $p = 0.6$.

Et nous pouvons noter: $X \leadsto B (700 ; 0.6)$.

En fait, on répète 700 fois un schéma de Bernoulli.

Et nous pouvons écrire: $P (X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$.

1. b. Déterminons la meilleure approximation de $P (X \geq 400)$:

Il s'agit ici de donner la meilleure approximation de $P (X \geq 400)$, avec: $X \leadsto B (700 ; 0.6)$.

Or: $P(X \geq 400) = 1 - P(X \leq 399)$.

À l'aide d'une machine à calculer: $P(X \leq 399) \approx 0.0573$.

Dans ces conditions: $P(X \geq 400) \approx 0.9427$.

D'où la meilleure approximation de $P(X \geq 400)$ est: 94%.

2. Déterminons le nombre de personnes demandées:

Ici, il s'agit de déterminer " n " tel que:

$P(X \geq 400) > 0.9$, avec: $X \rightsquigarrow B(n\,;0.6)$.

Grâce à la question précédente, nous savons déjà que:

$P(X \geq 400) \approx 0.9427$, quand $n = 700$.

Donc nous pouvons affirmer que: $n < 700$.

$P(X \geq 400) > 0.9 \iff 1 - P(X \leq 399) > 0.9$

$\iff P(X \leq 399) < 0.1$.

À l'aide d'une machine à calculer et avec $n = 694$, on trouve:

$$P(X \leq 399) \approx 0.0955.$$

Nous retiendrons: $n = 694$ personnes.

Ainsi l'institut doit interroger au minimum 694 personnes pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0.9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B : Le projet

1. Donnons un intervalle de confiance à 95% de la proportion de personnes qui sont favorables au projet :

Ici, nous avons : • $n \geq 50$

• $f = 0.29 \Rightarrow f = 29\%$.

Dans ces conditions :

$n \geq 30$, $n \cdot f = n \cdot 0.29 \geq 5$ et $n \cdot (1 - f) \geq 5$. (car : $n \geq 50$)

Les conditions étant réunies, un intervalle de confiance à 95% de la proportion de personnes qui sont favorables au projet s'écrit :

$$I = [\, f - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \,], \quad \text{cad :} \quad I = [\, 0.29 - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, 0.29 + \frac{1}{\sqrt{n}} \,].$$

2. Déterminons la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance à 95% ait une amplitude inférieure ou égale à 0.04 :

Nous savons que : $I = [\, 0.29 - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, 0.29 + \frac{1}{\sqrt{n}} \,]$

cad : $I = [$ Borne inférieure ; Borne supérieure $]$.

La longueur ou amplitude de l'intervalle I est :

$L =$ Borne supérieure - Borne inférieure $\Rightarrow L = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

On cherche donc n tel que : $L \leq 0.04$.

$L \leq 0.04 \iff \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0.04 \Rightarrow n \geq 2500$.

Au total, la valeur minimale de n est : 2500 personnes.

Partie C: L'arbre de probabilité

1. Indiquons les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- F = " la personne est en réalité favorable ".
- $\overline{F}$ = " la personne est en réalité défavorable ".
- A = " la personne affirme qu'elle est favorable ".
- $\overline{A}$ = " la personne affirme qu'elle est défavorable ".

- $P(A) = 29\%$
- $P(\overline{A}) = 71\%$

($29\% + 71\% = 1$).

- $P_F(A) = 85\%$
- $P_F(\overline{A}) = 15\%$

($85\% + 15\% = 1$).

- $P_{\overline{F}}(A) = 15\%$
- $P_{\overline{F}}(\overline{A}) = 85\%$

($15\% + 85\% = 1$).

Au total, nous pouvons ainsi affirmer que:

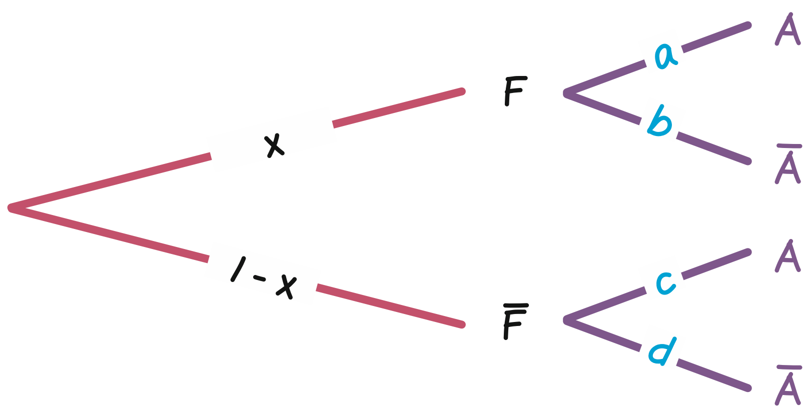
- $P_F(A) = 85\%$
- $P_{\overline{F}}(A) = 15\%$.

A partir de toutes ces données, il est alors possible de construire un arbre de probabilité, en posant:

$$x = P(F) \quad \text{et} \quad 1 - x = P(\overline{F}).$$

2. a. Complétons l'arbre de probabilité:

Nous avons l'arbre de probabilité suivant:



, avec:

- $a = 85\ \%$
- $b = 15\ \%$
- $c = 15\ \%$
- $d = 85\ \%$

2. b. Déduisons-en l'égalité vérifiée par le réel x:

L'événement $A = (A \cap F) \cup (A \cap \overline{F})$.

D'où: $P (A) = P (A \cap F) + P (A \cap \overline{F})$

$= P_F (A) \times P (F) + P_{\overline{F}} (A) \times P (\overline{F})$.

Ainsi: $P (A) = 85\% (x) + 15\% (1 - x)$

cad: $29\% = 70\% (x) + 15\%$ => $7 x + 1.5 = 2.9$. (a)

L'égalité vérifiée par x est donc: $7 x + 1.5 = 2.9$.

3. Déterminons, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet:

Cela revient à résoudre l'équation (a).

(a) <=> $7 x + 1.5 = 2.9$ => $x = 20\%$ de personnes.

Au total, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet est de: 20%.